
Research on Keyframe Animation Generation Method of Elastic Body Based on Inverse Finite Element Optimization Analysis

Hao Aimin, Lan Yu, Li Shuai, Yang Chen

School of Computing Science (State Key Laboratory of Virtual Reality Technology and System), Beihang University, Beijing, China

Email address:

ham_buaa@163.com (Hao Aimin), 13381317237@163.com (Lan Yu), lishuai@buaa.edu.cn (Li Shuai), 1831722383@qq.com (Yang Chen)

To cite this article:

Hao Aimin, Lan Yu, Li Shuai, Yang Chen. Research on Keyframe Animation Generation Method of Elastic Body Based on Inverse Finite Element Optimization Analysis. Science Discovery. Vol. 5, No. 2, 2017, pp. 108-117. doi: 10.11648/j.sd.20170502.15

Received: March 27, 2017; **Accepted:** April 18, 2017; **Published:** April 20, 2017

Abstract: This paper proposes a keyframe animation method of elastic body based on inverse Finite Element Method (FEM) analysis, which constructs a multi-objective optimization process and makes a space-time optimization analysis on the keyframes in deformation space to reconstruct a user-specified deformation space of target model. By introducing signed distance field, we translate user-specified keyframe shapes into implicit surfaces, which makes our method suitable for various data format. We define an objective function measuring the distance from displacement field to implicit surface, and meanwhile introduce inverse FEM into iterative optimization process to obtain optimal control force field and model material parameter. And all experimental results show the validity of our method in accuracy and efficiency.

Keywords: Keyframe Interpolation, Inverse FEM Optimization Analysis, Deformation Space Reconstruction

基于逆有限元优化分析的弹性体关键帧动画生成方法的研究

郝爱民, 兰宇, 李帅, 杨晨

计算机学院 (虚拟现实技术与系统国家重点实验室), 北京航空航天大学, 北京, 中国

邮箱

ham_buaa@163.com (郝爱民), 13381317237@163.com (兰宇), lishuai@buaa.edu.cn (李帅), 1831722383@qq.com (杨晨)

摘要: 提出基于逆有限元优化分析的弹性体关键帧动画生成方法, 通过使用逆有限元方法来构建多目标优化过程进而对形变空间中的关键帧进行时空优化分析来构造出符合指定目标模型的形变空间。通过引入符号距离场, 将用户指定的模型关键帧数据进行隐式曲面表达, 使得该方法适用于多种输入格式。定义位移场到隐式曲面的距离度量函数并作为优化目标函数, 同时在迭代优化过程中引入逆有限元方法来获得形变空间的最优控制施力场和模型材质参数。实验结果表明该方法在准确性以及效率方面的有效性。

关键词: 关键帧插值, 逆有限元优化分析, 形变空间重构

1. 引言

近年来,为弹性体构造出符合给定目标姿态的关键帧动画已经成为了研究者们普遍关注的问题。当在弹性体的运动序列中指定一组姿态为关键帧后,人们通常关注如何使弹性体在特定时刻尽可能满足用户指定的关键帧形状约束,并获得连续平滑的具有真实感的动画效果,这种连续形变恢复问题通常被称为关键帧插值[1]或是形状插值[2]。

现有的关键帧插值方法通常可以被分为两类:几何形状插值和基于物理的关键帧插值方法。可以看到,几何形状插值方法通常基于在相邻的两个几何网格间根据特定标准(如:等距标准)[3]寻找一致性,之后在两者相对应的图元间创造插值。虽然几何形状插值方法可以在两

个给定几何形状之间提供快速且合理的插值,但是通过这类方法得到的插值结果中,动力学效果和真实感是无法恢复的。基于物理的关键帧插值方法通常可以在很少人为干预的情况下提供真实感,这种方法试图创造一个需要最少非物理控制外力来匹配目标姿态或约束的合理运动,并且这类方法通常被转化成时空优化问题。当前研究人员已经提出了一些基于物理的关键帧插值方法[4][5][1][6][2],这类方法将采集到的模型运动序列进行三维体素化,得到一组体素网格(六面体或四面体网格),将其作为输入数据进行分析处理[5][1]。然而,这些方法依然要求用户设计完整的关键帧,交互过程繁琐,操作不灵活。同时,关键帧插值方法的位置约束过多,容易在结果动画中引入过大的控制外力,导致不自然的动态效果。

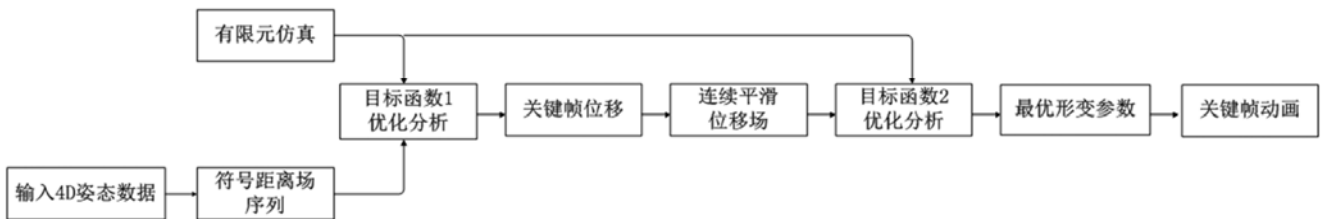


图1 方法流程图。

本文的主要贡献在于,提出基于逆有限元分析的弹性体关键帧动画生成方法,构造基于物理并匹配关键帧运动的连续平滑形变空间。为了克服上述挑战,方法通过以下三个步骤来加以解决:

第一,为目标模型构造给定关键帧下的有限元模型位移场。首先将给定的输入关键帧姿态转化为符号距离场(Signed Distance Field),符号距离场具有对于各种多边形网格普遍适用的优点。使用符号距离场来表示目标姿态使得方法无需对多个给定的关键帧之间建立一致性关联。

第二,将所得到的多个指定关键帧的符号距离场根据其时空顺序,基于逆有限元分析,执行满足其时空连续性的目标优化过程。通过定义一个目标函数序列,它可以依照时空顺序测量由有限元位移场表示的模型姿态到各个目标姿态的差异。之后,将这个目标函数序列带入并执行一个最优控制问题求解过程来得到对应的最优的目标函数序列,同时也会得到最优控制施力场。在优化问题求解过程中,目标函数达到最优化即代表着被构造的模型形变空间所描述的姿态与各个目标姿态的差异达到了最小,因此通过将上述最优化输出结果应用于有限元模型后,就可以得到符合指定目标姿态关键帧的有限元模型在关键帧处的位移场。

第三,在进行形变仿真序列生成过程中,方法会对步骤二得到的有限元模型进行线性模态分析,通过分析有限元模型所表示的形变空间的显著形变特征并将现有的形变空间向显著形变空间进行投影来降低形变空间的维度。一方面,可以提高物理模型的仿真解算效率。另一方面,可以对目标模型形变特征进行显著性表达。为了弥补线性模态空间在描述大形变时的问题,采用了旋转应变坐标方法(Rotation-Strain Coordinates Method)[2],这种

方法基于对一个姿态的形变梯度进行极分解,可以在很好应对大形变的同时提供从模态坐标到位移场的线性映射。由于这种从模态坐标到位移场的线性关系对于有效地解决时空问题至关重要,所以这种旋转应变坐标方法十分适用于当前方法来解决大形变问题。并且优化过程在每两个相邻关键帧位移之间按照个人设定,在旋转应变坐标下生成一定数量的插值位移作为新增的关键帧,并且定义另一个目标函数,此目标函数定义着模型姿态与新生成的所有关键帧位移偏差的加权和与控制外力的加权和的总和,并通过求解这个时空优化问题来得到最优的形变控制信息。

2. 相关工作

本节将从以下几个方面简单介绍与本文相关的已有工作:关键帧插值,有限元方法与模型化简方法。

2.1. 关键帧插值

关键帧插值方法通常可以被分为两类:几何形状插值和基于物理的关键帧插值方法。对于几何插值[7][8][9]来说,这类方法可以提供两个给定集合形状之间快速合理的插值,通常基于在源网格和目标网格之间建立某种一致性关系,然而这类方法缺少对动力学效果的控制。另一种是基于物理的关键帧插值仿真,大量研究者尝试了为纸张[10],皮肤[11][12],烟雾[13][14],流体[4]和可形变的弹性体等[5][2][1]创造出由关键帧姿态引导控制的仿真运动。郝等人[10]提出了在一定近似逼近以及先验知识指导下的基于过程控制的纸张变形建模方法。在面部仿真中,形状插值[11]和姿态空间形变[12]可能是最广泛使用的用于控制皮肤形变至目标形状的方法。给定一序列目标烟雾状态下,研究者们想要生成能够控制烟雾顺时趋向各

个目标且同时保持自然的烟雾表现的仿真运动, Treuille 等人 [13] 根据一个仿真能够匹配用户给定的关键帧姿态的程度构造了一个目标函数, 并利用目标函数的导数求解能够最小化这个目标函数的控制外力参数, Fattal 和 Lischinski [14] 为标准的流动方程引进新项来直接控制烟雾仿真得到想要的形状, 其中目标形状由一序列的目标密度场给定。杨等人 [15] 利用符号距离场基于中轴点云提供三种控制力来控制烟雾来形成各种给定的目标形状。类似于烟雾仿真, Mcnamara 等人 [4] 介绍了一种全面的基于物理的控制流体仿真的方法, 该方法在给定一组关键帧后, 利用伴随方法 (the Adjoint Method) 求解基于梯度的非线性优化问题。本文的工作也受益于使用有限元方法建模形变物体并对其进行插值重建的方法。Barbič 等人 [5] 最小化了一个测量关键帧差异与物理轨迹差异之和的目标函数, 其中利用伴随方法快速地计算了目标函数的导数, 并且通过利用关键帧生成的一个高质量的子空间来加速整个过程。Huang 等人 [2] 结合起一种将模态分析适应于大形变的扩展和一种对形变梯度的泊松重建过程来在两个姿态之间生成基于物理的形状插值。Hildebrandt 等人 [6] 通过结合模型化简 (Model Reductoin), 多点线性化 (Multipoint Linearization), 和常微分方程的解耦得到内在变分问题的模型化简, 达到了交互响应下控制基于物理的运动的运动的效果。最近, 和之前的方法相对不同, Li 和 Huang [1] 提出了一种新颖的优化方法求解时空优化问题得到关键帧插值运动, 他们不但对控制外力进行优化, 同时也对材质信息进行了优化以更好地匹配用户指定的关键帧姿态, 并且通过在低维旋转应变空间进行计算提高了时间效率。

最近, Xia 和 Li 等人 [16] 基于数据驱动的策略, 提出模态空间细分的方法在一组稀疏的 3D 采样模型之间生成密集的具有物理真实感的形状序列。受到 [5] 和 [1] 的启发, 本文将优化问题转化为对一个目标函数的最小化, 该目标函数以子空间的控制施力场和材质信息作为参数, 定义为当前有限元模型姿态与给定目标姿态的有向距离场内嵌入闭合曲面之间的差异, 并且结合模态分析及旋转应变坐标来加速并适用于大形变。

2.2. 有限元方法与模型化简方法

有限元方法已被证明为可以准确为物理和机械原理建模的强有效的方法。大量的实时有限元法是基于线性规划的。例如, Dick 等人 [17] 提出了基于六面体的在 GPU 上进行多尺度网格求解的有限元方法, Dick [18] 进一步地引进共旋应变的方法, 将非线性仿真缩减为线性时间复杂度。基于开源框架 SOFA [19], Allard 等人 [20] 提出了一系列的数值方法来在 GPU 上隐式地求解基于有限元的形变系统。Yang 和 Li 等人 [21] 进一步地提出将无网格方法与有限元方法进行耦合用于非均质物体的切割仿真。虽然全局的基于物理的方法在仿真可形变物体方面可靠且准确, 但是它们通常计算起来十分复杂。模型化简方法 (通常也被称为子空间方法) 可以在保持主要形变空间的同时极大地降低仿真复杂度 [22]。通常, 模型化简方法主要着力于有限元仿真的线性形变, 线性模态分析 (Modal Analysis)

[23] [24] 是一种强有效的将形变空间分解为一组振动模态的模型化简技术, 然而, 在大形变下这种方法不太适用。为了应对大形变, Choi 等人 [25] 在模态空间中基于节点的刚度矩阵旋转将线性模态分析扩展至大形变。Barbič [26] 提出了一种自动的模态导数方法来选择一组高质量的子空间基向量以补充原模态基底。Kim 和 James [27] 发明了在线的模型化简方法, 全物理的计算被自适应的略过代之以基于之前的仿真子空间的形变重构以适应一般的运动。最近, 旋转应变坐标方法 [2] [1] [28] 已经被证明为在子空间中具有鲁棒性的可以重构大形变下的合理形状的方法。Hahn [29] 提出了一种新的在时间上自适应基底的线性子空间中进行衣物仿真的方法。类似的, Yang 等人 [30] 设计了一种基于有限元的时变多子域方法以任意切割非均质物体。

3. 基于物理的关键帧动画生成方法

3.1. 有限元方法与模态分析方法

通过使用有限元方法建模, 形变模型相对于静止姿态 \bar{q} 的线性化运动方程是一个二阶常微分方程组:

$$M\ddot{q} + D\dot{q} + Kq = f_{ext}(t) \quad (1)$$

其中 $q \in \mathbb{R}^{3n}$ 代表着相对于静止姿态 \bar{q} 的物体姿态的离散化表示中的所有 n 个结点的位移, $M, K, D \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$ 分别是质量矩阵, 刚度矩阵, 以及 Rayleigh 阻尼矩阵, 并且 $f_{ext}(t)$ 是在时刻 t 下的控制外力。在时刻 t 下, 形变模型的姿态可恢复为 $\bar{q} + q(t)$ 。

对有限元模型的化简可以通过将方程 (1) 投影到一个 r 维子空间上来得到 ($r \ll 3n$), 这个 r 维子空间是由某个基矩阵 $W \in \mathbb{R}^{3n \times r}$ 的列向量扩展而成。通常, 线性模态分析通过利用求解如下的一般的特征化问题来为此运动方程构建一个形变子空间:

$$K\phi = \lambda M\phi \quad (2)$$

通过将最小的 r 个特征值集成到一个对角矩阵 $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ 中, 并且将它们对应的特征向量存储在矩阵 $W = (\phi_1, \dots, \phi_r)$ 中, 且具有 $W^T M W = I$, $W^T K W = A$ 的性质, 若设

$$q = Wz, z \in \mathbb{R}^r \quad (3)$$

可以将方程 (1) 重写成模态子空间中的 r 个方程的集合:

$$\ddot{z} + \tilde{D}\dot{z} + Az = f_{r,ext}(t) \quad (4)$$

其中 z 代表位移在子空间的投影, $\tilde{D} = W^T D W$ 是子空间中的阻尼矩阵投影, $f_{r,ext}(t) = W^T f_{ext}(t)$ 代表着外力在子空间的投影, A 代表刚度矩阵在子空间的投影。由于

$r \ll 3n$, 对方程(4)的积分要比对全局的方程(1)的求解更快的多。之后可以将子空间坐标通过方程(3)映射回全局3D坐标。

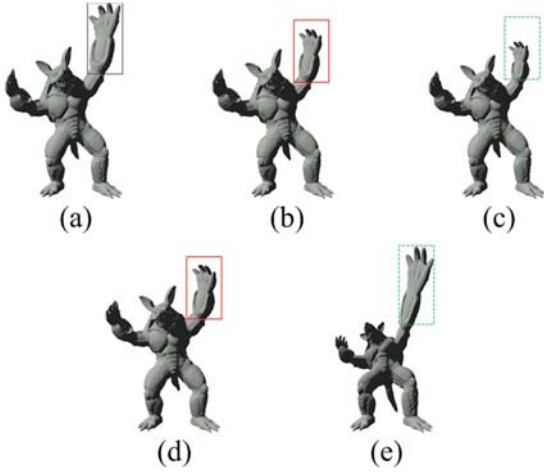


图2 相同条件下, 使用旋转应变坐标方法、Modal Warping方法以及未对大变形处理间的比较。(a) 不处理大变形时在第9个时间步的仿真输出; (b) 使用旋转应变坐标时在第9个时间步的仿真输出; (c) 使用Modal Warping方法时第9个时间步的仿真输出; (d) 使用旋转应变坐标方法时在第23个时间步的仿真输出; (e) 使用Modal Warping方法时在第23个时间步的仿真输出。

3.2. 大变形处理方法

线性模态分析适用于小形变, 对大形变无效, 在大形变情况下, 会呈现出失真异常。在处理大形变时, 旋转应变坐标法[2]已经被证明为求解时空优化问题时最具有鲁棒性的处理方法。对于第 i 个六面体单元, 局部的旋转应变坐标 \mathbf{y}_e 是由一个 3×3 的代表旋转的 $\boldsymbol{\omega}_i$ 和一个 3×3 的代表应变的 $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ 矩阵组成的, 它们分别是对这个六面体单元对应的平均形变梯度 $(\mathbf{G}q)_i$ 进行极分解之后得到的反对称部分和对称部分, 其中 \mathbf{G} 是相对于静止姿态的空间梯度算子。之后可以通过以下方法重建出全局位移 q : 首先利用指数映射计算出形变梯度;

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}_e)_i = \exp(\boldsymbol{\omega}_i)(\mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}_i) - \mathbf{I} \quad (5)$$

其中 \mathbf{I} 是单位矩阵。之后求解一个泊松重构问题:

$$\min_q \sum_{i=1}^{|T|} \bar{V}_i \|(\mathbf{G}q)_i - \mathbf{g}(\mathbf{y}_e)_i\|_F^2 \quad (6)$$

其中 $|T|$ 是六面体单元的数目, \bar{V}_i 是静止姿态时每个单元的体积, 并且 $\|\cdot\|_F$ 代表Frobenius范数。

如在[1]所述, 这个泊松重构问题可以按如下求解

$$\mathbf{A}q = \mathbf{G}^T \bar{\mathbf{V}} \mathbf{g}(\mathbf{y}) \quad (7)$$

其中 $\mathbf{A} = \mathbf{G}^T \bar{\mathbf{V}} \mathbf{G}$, $\bar{\mathbf{V}}$ 是一个对角矩阵, 其中对角线上是每个六面体 i 的体积 \bar{V}_i 重复9次。 $\mathbf{g}(\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{9|T|}$ 向量是局部形变梯度矩阵 $\mathbf{g}(\mathbf{y}_e)$ 的行向量通过连接而得到的。

为了进一步简化对 q 的重构, 将方程(3)插入到方程(7)之中来得到

$$(\mathbf{W}^T \mathbf{A} \mathbf{W})z = \mathbf{W}^T \mathbf{G}^T \bar{\mathbf{V}} \mathbf{g}(\hat{\mathbf{W}}z) \quad (8)$$

其中 $\mathbf{W} = \{\hat{\mathbf{W}}_1, \hat{\mathbf{W}}_2, \dots, \hat{\mathbf{W}}_n\}$, 并且 $\hat{\mathbf{W}}_i := \{\boldsymbol{\omega}(W_i), \boldsymbol{\varepsilon}(W_i)\}$, 具体细节参见[2]。

最终, 可按如下方程重构出全局位移 q 和模态坐标 z 之间的关系

$$\begin{aligned} q &= \mathbf{W}(\mathbf{W}^T \mathbf{A} \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{G}^T \bar{\mathbf{V}} \mathbf{g}(\hat{\mathbf{W}}z) \\ &= \mathbf{P} \mathbf{g}(\hat{\mathbf{W}}z) \end{aligned} \quad (9)$$

并且本文可以通过图 2所示来观察到使用旋转应变坐标方法、Modal Warping方法时得到的大形变下的不同仿真效果。可以看到相比于使用Modal Warping方法或不处理大形变, 使用旋转应变坐标更加适用于处理大形变问题。

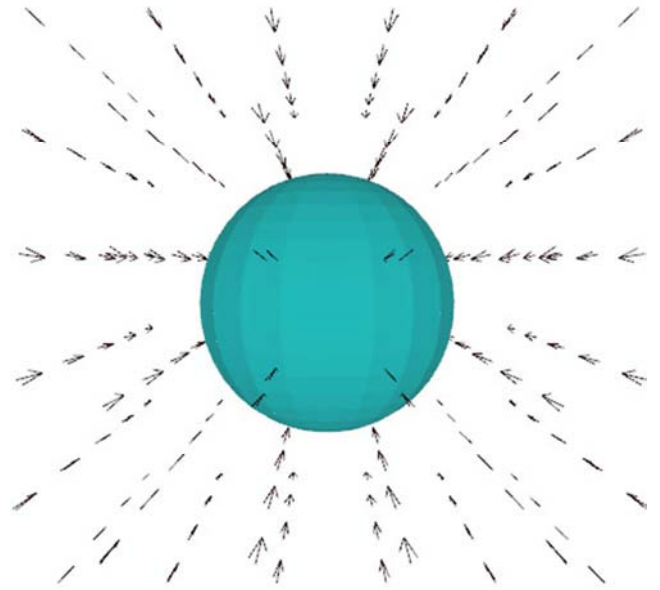


图3 符号距离场在每一空间点上的梯度方向示意图。

3.3. 关键帧位移生成的目标函数

本文使用符号距离场来表示关键帧的目标姿态, 并且引导有限元模型去匹配时间序列上的给定姿态的符号距离场。符号距离场可以按如下定义为:

$$\text{Dist}(\mathbf{p}) = \begin{cases} -d_i(\mathbf{p}), & \text{if } \mathbf{p} \text{ is inside the model} \\ d_i(\mathbf{p}), & \text{otherwise} \end{cases} \quad (10)$$

其中 $d_i(\mathbf{p})$ 表示着从空间点 \mathbf{p} 到有向距离场内嵌的闭合曲面上的最短的欧几里得距离在图 3 中展示了符号距离场的重要性质, 即符号距离场在空间中某一点的梯度正好指向它定义的闭合曲面上离此空间点最近的一点。从图中可以看到, 对于一个球体的符号距离场, 空间中的每一点上的梯度方向正好指向了它的球心。

为了建立起一个符号距离场, 本文在处理不同种输入数据时选择不同的方法。对于多边形网格输入, 本文选择快速行进法[31] (fast marching method) 或是快速扫描方法[32] (fast sweeping method)。

当为关键帧目标姿态建立好符号距离场之后, 可以构造如下目标函数并且寻找最优的控制参数来最小化此目标函数。使得在最优控制参数下, 对物体进行仿真时, 其运动会在关键帧上与目标姿态吻合。

$$\begin{aligned} E(\mathbf{X}) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{nKey} (\mathbf{Dist}_i(\mathbf{x}(t_i)))^T \mathbf{Q}_i (\mathbf{Dist}_i(\mathbf{x}(t_i))) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{nKey} (\mathbf{Dist}_i(\mathbf{A}\mathbf{q}(t_i)+\mathbf{x}_0))^T \mathbf{Q}_i (\mathbf{Dist}_i(\mathbf{A}\mathbf{q}(t_i)+\mathbf{x}_0)) \end{aligned} \quad (11)$$

这里, $nKey$ 是关键帧的总数目, $\mathbf{x}(t_i) \in \mathbb{R}^{3m}$ 表示在时刻 t_i 下, 六面体有限元模型内嵌的网格形变后的 m 个采样顶点的3D坐标组成的向量, $\mathbf{x}(t_i) = \mathbf{A}\mathbf{q}(t_i) + \mathbf{x}_0$ 是从六面体体素网格位移 \mathbf{q} 到内嵌网格位移 \mathbf{x} 的映射, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3m \times 3n}$ 是常量的映射矩阵。 \mathbf{X} 是向量 $\mathbf{x}(t_i)$ 的组合, $\mathbf{Dist}_i \in \mathbb{R}^m$ 代表从 m 个内嵌网格顶点的3D坐标向量到第 i 个关键帧符号距离场的标量值组成的向量的映射。 $\mathbf{Q}_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 是误差矩阵, 通常被设置为按比例缩放的单位矩阵。

然而, 在全局空间求解时空优化问题时, 有限元系统的数值求解过程中的迭代算法容易陷入局部最小值, 不仅如此, 还会伴随着极高的求解时间复杂度[5], 因此本文借助线性模态分析来对当前的时空优化问题进行优化。现有的方法通常设定一个先验的固定的刚度矩阵 \mathbf{K} , 然后在此条件下寻找最优的控制外力序列 \mathbf{F}_{ext} 来尽可能地与关键帧姿态进行匹配。然而, 提前预设好材质信息的方式存在的问题是, 若关键帧姿态与选择好的材质是不能相互兼容的话, 最终得到的运动序列不能匹配关键帧。所以, 受到[1]的启发, 本文提出将子空间的刚度矩阵投影 \mathbf{A} 作为时空优化问题的可变参数, 随着控制外力一起进行更新优化。根据以上叙述, 本文通过插入方程(9)来将目标函数重写成如下

$$\begin{aligned} E_1(\mathbf{Z}, \mathbf{F}_{r,ext}, \mathbf{A}) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{nKey} (\mathbf{Dist}_i(\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{g}(\hat{\mathbf{W}}\mathbf{z}(t_i))+\mathbf{x}_0))^T \mathbf{Q}_i \\ &\quad (\mathbf{Dist}_i(\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{g}(\hat{\mathbf{W}}\mathbf{z}(t_i))+\mathbf{x}_0)) \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{r \times T_{step}}$ 是 T_{step} 个时间步下的子空间位移 $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^r$ 的集合向量, T_{step} 是总共的时间步数 $T_{step} \geq nKey$,

子空间位移的计算是由仿真时施加的 $\mathbf{F}_{r,ext}$, \mathbf{A} 来唯一决定的, $\mathbf{F}_{r,ext} \in \mathbb{R}^{r \times T_{step}}$ 是 T_{step} 个子空间控制施力的集成向量。

3.4. 连续平滑动画生成的目标函数

当对方程(12)的优化问题求解完成以后, 可以得到 $nKey$ 个匹配给定目标姿态的关键帧六面体网格位移 $\mathbf{q}_{t_1}, \mathbf{q}_{t_2}, \dots, \mathbf{q}_{t_{nKey}}$ 。考虑到这些选定的关键帧之间彼此的时间间隔是不固定的且时间跨度可能较大, 所以当仅仅完成对方程(12)的优化求解后得到的仿真运动虽然在关键帧上匹配了目标姿态, 但由一个目标姿态到达下一个目标姿态的运动不平滑, 会产生不连续的位移场输出。因此为了获得连续的位移场, 本文需要在每两个已得的关键帧位移之间进行插值。然而, 由于在位移向量之间进行简单的线性插值会缺少旋转信息从而会导致视觉上的不自然, 类似于[2]所述, 本文将已得的关键帧位移转化到旋转应变空间 $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{t_{nKey}}$, 之后在旋转应变坐标之间进行插值 $\mathbf{y}_{i,k} = (1-k)\mathbf{y}_i + k\mathbf{y}_{i+1}, k \in (0,1)$, 再将插值得到的旋转应变坐标映射回3D六面体网格位移 $\mathbf{q}_{0_Tar}, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{T_Tar}$, 其中 num 是用户想要通过插值得到的目标位移的总数目 ($T_{step} \geq num \geq nKey$)。

为了驱动有限元模型仿真且与之前得到的 num 个六面体网格位移相匹配, 本文定义如下的目标函数:

$$\begin{aligned} E_2(\mathbf{Z}, \mathbf{F}_{r,ext}, \mathbf{A}) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{num} (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{i_Tar})^T \mathbf{Q}_i (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{i_Tar}) + \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{T_{step}} (\mathbf{f}_{r,ext,i})^T \mathbf{R}_i (\mathbf{f}_{r,ext,i}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{num} (\mathbf{P}\mathbf{g}(\hat{\mathbf{W}}\mathbf{z}_i) - \mathbf{q}_{i_Tar})^T \mathbf{Q}_i (\mathbf{P}\mathbf{g}(\hat{\mathbf{W}}\mathbf{z}_i) - \mathbf{q}_{i_Tar}) + \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{T_{step}} (\mathbf{f}_{r,ext,i})^T \mathbf{R}_i (\mathbf{f}_{r,ext,i}) \end{aligned} \quad (13)$$

$\mathbf{f}_{r,ext,i}$ 是时间步 i 下的子空间外力, $\mathbf{R}_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 是由用户设定的外力误差矩阵, 通常是一个单位矩阵的缩放。本文添加方程(13)的第二个加和项是因为当受到的控制外力的作用越少时, 得到的插值仿真运动越会显得自然。所以本文优化关键帧差异的加权和以及所需的控制外力量。为了尽可能与关键帧姿态相匹配, 本文可以为方程(12)优化求解后得到的原关键帧六面体网格位移 \mathbf{q}_{i_Tar} 赋予更大的权重 \mathbf{Q}_i 。

4. 目标函数优化方法

本文使用共轭梯度优化方法来对目标函数进行优化求解。其中目标函数相对于参数序列的梯度利用伴随方法来计算, 以得到较为快速的迭代和收敛。伴随方法[4][5]可视为“黑箱”, 给定当前控制参数序列, 伴随方法可高效地计算目标函数值及其相对于参数序列所有组成部分的梯度, 详情参见4.1, 4.2小节。本文采用一种迭代式方

案来有效地求解时空优化问题。首先，本文将子空间的刚度矩阵投影视为常量然后优化控制施力场，再将控制施力场视为常量然后优化子空间的刚度矩阵投影。

4.1. 共轭梯度优化方法

在目标函数具有可计算的梯度时，预条件共轭梯度方法 (PCG Method) 可被用于求解无约束优化问题 [5] [33]。当求解 PCG 优化算法时，需要进行一系列前向的仿真来搜索梯度的方向并且更新目标函数的参数。PCG 优化算法的最重要的部分就是如何去计算目标函数相对于其参数的梯度，这一工作可以通过使用伴随方法来求解。

由于代表有限元系统的大型稀疏矩阵投影到子空间后会被转化成小型稠密矩阵，使得系统在求解过程中可以获得更高的计算效率。因此本文在子空间中完成对模型仿真的控制。本文定义一个由子空间上的位移，速度和加速度的投影构成的状态向量 \hat{z}_i 。

$$\hat{z}_i = (\mathbf{z}_i^T, \dot{\mathbf{z}}_i^T, \ddot{\mathbf{z}}_i^T)^T \quad (14)$$

基于物理的仿真由一个初始状态 \hat{z}_0 开始，之后对这一状态应用一序列控制参数为 $\mathbf{f}_{r,ext,i}$ ， \mathbf{A} 的可微控制函数 \mathbf{f}_i ，并依据这样的更新规则来一步步生成 T_{step} 个后续的状态 $\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_{T_{step}}$ 。

$$\hat{z}_{i+1} = \mathbf{f}_i(\hat{z}_i, \mathbf{f}_{r,ext,i}, \mathbf{A}) \quad (15)$$

将这些状态向量集成到一个长状态向量：

$$\hat{\mathbf{Z}} = [\hat{z}_1^T, \dots, \hat{z}_{T_{step}}^T]^T \quad (16)$$

此状态向量 $\hat{\mathbf{Z}}$ 可表示对可形变模型施加控制力场后的子空间仿真输出序列。本文的目标是在参数空间中检索出最优的控制参数 $\mathbf{f}_{r,ext,i}$ ， \mathbf{A} 以控制模型仿真得到目标姿态。检索过程需要得到目标函数相对于控制参数 $\mathbf{f}_{r,ext,i}$ ， \mathbf{A} 的梯度，4.2，4.3 节将分别介绍利用伴随方法求解目标函数相对于两类控制参数的梯度的过程。

4.2. 对控制施力场的优化

将可微函数的序列集成为一个长函数向量，其中控制外力作为控制参数。

$$\mathbf{F}(\hat{\mathbf{Z}}, \mathbf{F}_{r,ext}) = [\mathbf{f}_0(\hat{z}_0, \mathbf{f}_{r,ext,0})^T, \dots, \mathbf{f}_{T_{step}-1}(\hat{z}_{T_{step}-1}, \mathbf{f}_{r,ext,T_{step}-1})^T]^T \quad (17)$$

于是，可以将方程 (15) 写成如下形式

$$\hat{\mathbf{Z}} = \mathbf{F}(\hat{\mathbf{Z}}, \mathbf{F}_{r,ext}) \quad (18)$$

对方程 (18) 求解微分会得到对导数矩阵 $d\hat{\mathbf{Z}}/d\mathbf{F}_{r,ext}$ 的一种线性约束

$$\left(\mathbf{I} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \hat{\mathbf{Z}}} \right) \frac{d\hat{\mathbf{Z}}}{d\mathbf{F}_{r,ext}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{F}_{r,ext}} \quad (19)$$

之后可以推导出方程 (12) 相对于控制施力场的梯度

$$\frac{dE}{d\mathbf{F}_{r,ext}} = \frac{\partial E}{\partial \hat{\mathbf{Z}}} \frac{d\hat{\mathbf{Z}}}{d\mathbf{F}_{r,ext}} \quad (20)$$

直接计算方程 (20) 的右面项是非常繁琐且耗时的，因为矩阵 $d\hat{\mathbf{Z}}/d\mathbf{F}_{r,ext}$ 是由在每一时间步下不同的控制外力所决定的。为了便于计算，本文引进满足如下方程的伴随向量 \mathbf{R}

$$\left(\mathbf{I} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \hat{\mathbf{Z}}} \right)^T \mathbf{R} = \left(\frac{\partial E}{\partial \hat{\mathbf{Z}}} \right)^T \quad (21)$$

之后方程 (20) 可以按如下方式来计算

$$\frac{dE}{d\mathbf{F}_{r,ext}} = \mathbf{R}^T \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{F}_{r,ext}} \quad (22)$$

为了得到伴随向量 \mathbf{R} 的显示表达，将方程 (21) 中的约束重写为

$$\mathbf{R} = \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \hat{\mathbf{Z}}} \right)^T \mathbf{R} + \left(\frac{\partial E}{\partial \hat{\mathbf{Z}}} \right)^T \quad (23)$$

并且如果将 \mathbf{R} 看做是一序列伴随状态 $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{T_{step}}$ 的集合，可得到如下方程

$$\mathbf{r}_i = \left(\frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \hat{\mathbf{z}}_i} \right)^T \mathbf{r}_{i+1} + \left(\frac{\partial E}{\partial \hat{\mathbf{z}}_i} \right)^T, \mathbf{r}_{T_{step}} = \left(\frac{\partial E}{\partial \hat{\mathbf{z}}_{T_{step}}} \right)^T \quad (24)$$

利用隐式 Newmark 积分，可以对方程 (4) 进行变换计算出 \mathbf{f}_i 和 $\partial \mathbf{f}_i / \partial \hat{\mathbf{z}}_i$ 。在经过上述变换之后，将方程 (22) 转化成如下最终形式

$$\frac{dE}{d\mathbf{F}_{r,ext}} = \left[\mathbf{r}_1^T \frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial \mathbf{f}_{r,ext,0}}, \dots, \mathbf{r}_{T_{step}}^T \frac{\partial \mathbf{f}_{T_{step}-1}}{\partial \mathbf{f}_{r,ext,T_{step}-1}} \right] \quad (25)$$

这样就可以得到目标函数相对于控制施力场的梯度。当完成了对于控制施力场的优化后，可以按如下类似的方式求解对子空间的刚度矩阵投影的优化。

4.3. 对子空间刚度矩阵投影的优化

类似于上述对控制施力场的处理过程，在将控制施力场视为常数的情况下，本文将可微函数的序列集成为一个长函数向量，其中子空间的刚度矩阵投影作为控制参数。

$$\mathbf{F}(\hat{\mathbf{Z}}, \mathbf{A}) = \left[\mathbf{f}_0(\hat{z}_0, \mathbf{A})^T, \dots, \mathbf{f}_{T_{step}-1}(\hat{z}_{T_{step}-1}, \mathbf{A})^T \right]^T \quad (26)$$

并将方程 (15) 写成如下形式

$$\dot{\hat{Z}} = F(\hat{Z}, \mathcal{A}) \quad (27)$$

由此可以推导出方程 (12) 相对于子空间的刚度矩阵投影的梯度

$$\frac{dE}{d\mathcal{A}} = \frac{\partial E}{\partial \hat{Z}} \frac{d\hat{Z}}{d\mathcal{A}} \quad (28)$$

同样地，当引进了伴随向量 \mathbf{R} 后，利用方程 (24) 的展开，将方程 (28) 转化成如下最终形式

$$\frac{dE}{d\mathcal{A}} = \left[r_1^T \frac{\partial f_0}{\partial \mathcal{A}}, \dots, r_{T_{step}}^T \frac{\partial f_{T_{step}-1}}{\partial \mathcal{A}} \right] \quad (29)$$

当得到了目标函数相对于子空间的刚度矩阵投影的梯度后，就可以利用PCG优化方法对子空间的刚度矩阵投影进行优化更新。

通过迭代的方式不断更新子空间的控制施力场和刚度矩阵投影后，最终可以得到将目标函数最小化的最优的子空间的控制施力场和刚度矩阵投影，再将这些最优参数应用于有限元仿真模型后，就可以得到在关键帧处匹配目标姿态且具有物理真实感的平滑的连续仿真运动了。

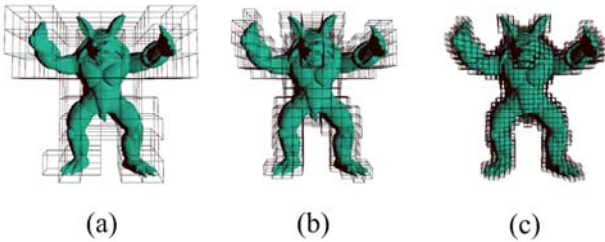


图4 不同层次下的有限元网格。(a) 层次4下Armadillo的六面体有限元网格；(b) 层次5下Armadillo的六面体有限元网格；(c) 层次4下Armadillo的六面体有限元网格。

5. 实验结果

为了展示本文弹性体关键帧动画生成方法的有效性，本文进行了3组实验来展现本文的方法在不同条件下的表现。

第一组使用Armadillo模型进行的实验如图 5所示。此例的输入是一序列的由外力下进行前向有限元仿真出得到的3D三角网格。为了重建出运动序列，首先为第一个3D三角网格构造一个分层次的基于八叉树的六面体有限元模型。如图 4所示，是Armadillo在不同层次下得到的六面体体素网格，网格越密越能更好地近似物体，然而，仿真时的时间复杂度也会随之提高，之后可通过实验在选择更好的近似度和较少的时间复杂度之间进行平衡。本文将模型的材料信息如杨氏模量，泊松比和密度初始化为经验值。本文无需知道产生输入序列时所使用的材质信息的准确值，因为本文方法中的对于子空间的材质信息进行优化的步骤可以对材质参数进行估计并且使得目标模型能

够在重建的形变空间中表示给定的目标姿态。如图 5所示，上排灰色的Armadillo序列是给定的目标关键帧序列，是由前向有限元仿真得到的，下排紫色的Armadillo序列是由本文的方法得到的与目标关键帧吻合的模型关键帧形变，可以看出两者在姿态和形变状态变化方面相吻合。图 6所示是在重建后的两个关键帧位移之间，进行插值后得到的中间帧姿态的效果，可以看到中间帧插值结果平滑自然，且富有丰富的动态效果。

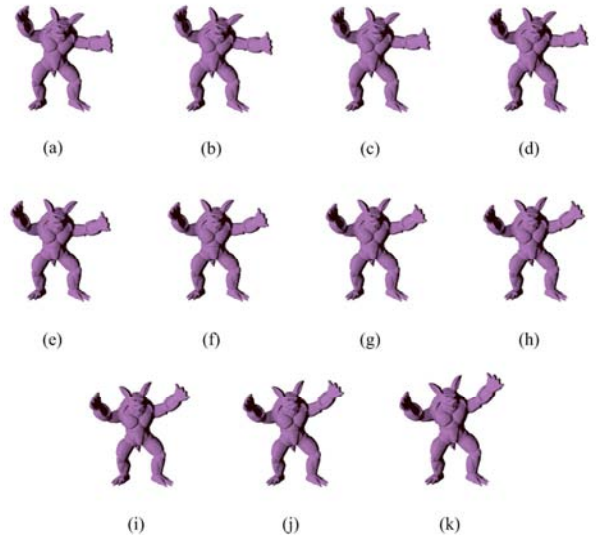


图5 在两个关键帧之间的插值结果。(a)、(k) 分别是重建得到的两个相邻的关键帧；(b)~(j) 是在这两个关键帧之间插值得到的中间帧结果。

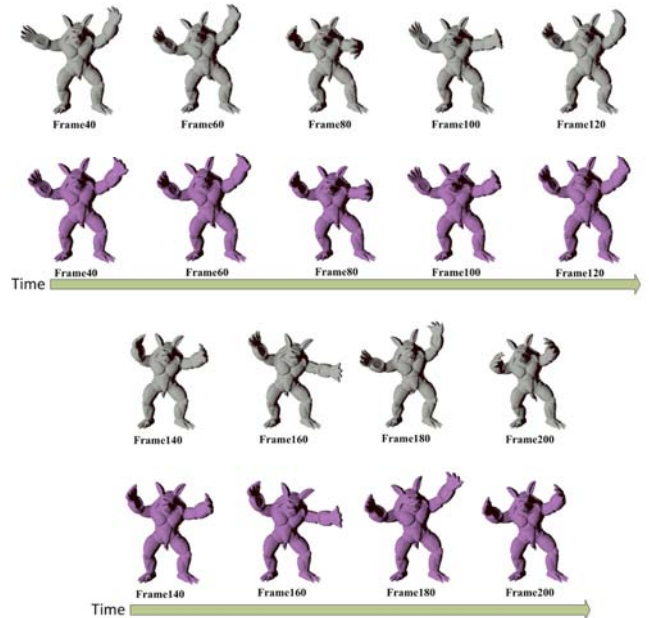


图6 给定上排灰色的Armadillo模型的关键帧三角网格序列作为输入，本文方法重建出在关键帧匹配目标姿态的关键帧位移，如下排所示。

第二组实验中，本文选取Beam模型的仿真结果输出的一系列的最高点与最低点的三角网格作为输入。如图 7所示，给定蓝色的目标姿态1和2，重建出匹配的关键帧位移1和2，并在两个关键帧位移之间可以插值得到平滑

运动的中间结果。并且，当本文设置的初始材质参数不同时，最终得到的收敛结果相差无几，说明本文的方法不会受到初始参数设置的影响。为了比较不同子空间模态数目下和不同层次的有限元网格下的重建效果，本文做了多组Beam相关实验，并在表 1中显示详细效果。实验所使用的Beam有限元模型的初始内嵌三角网格顶点数为232，一共46帧关键帧。从表中可以看出，在相同子空间模态数目下，六面体网格层次越高，所能重建得到的关键帧越与给定姿态相吻合。相同六面体网格层次下，增加子空间模态数目并不会会有太大的精确度的提升。而同样在层次5和模态数目30的情况下，使用旋转应变(RS)坐标对准确度有较大提升。

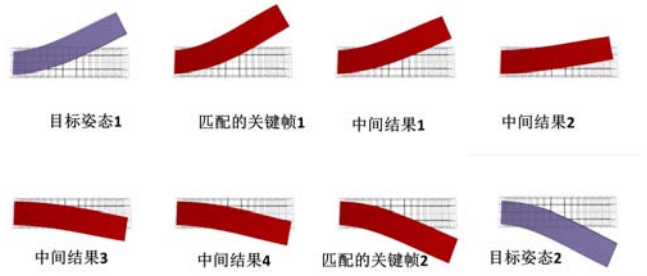


图7 上下摆动的Beam模型插值结果。

表1 Beam模型在不同条件设置下的结果比较。

| 与关键帧初始误差 | 20.638 | 20.638 | 20.638 | 20.638 | 20.638 | 20.638 |
|-------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 模态数目 | 30 | 30 | 30 | 60 | 120 | 30 |
| 是否使用RS坐标 | No | No | No | No | No | Yes |
| 六面体网格层次 | 4 | 5 | 6 | 6 | 6 | 5 |
| 结果总误差 | 8.749 | 8.549 | 4.956 | 4.987 | 4.886 | 3.645 |
| 重建结果平均误差 (每个三角网格顶点上的误差) | 8.198e-4 | 8.011e-4 | 4.644e-4 | 4.672e-4 | 4.578e-4 | 3.415e-4 |

第三组实验中，本文以恐龙模型再次说明本方法的有效性。首先给定上排黄色姿态作为目标姿态，并重建出下排绿色的符合目标姿态的关键帧位移，如图 8所示，可见重建结果良好，与目标姿态十分相近。之后在相邻关键帧之间进行插值得到连续平滑的动画效果，如图9所示。



图8 恐龙模型的关键帧位移重建结果。上排黄色为输入的目标姿态，下排绿色为关键帧位移重建结果。



图9 恐龙模型相邻关键帧间的插值结果。

6. 结论

本文提出了一种新的基于逆有限元优化分析的弹性体关键帧动画生成方法，该方法适用于多种类型的关键帧姿态输入，例如多边形网格序列或是同一物体的4D体数据。本文为输入的目标姿态建立符号距离场，构造六面体有限元模型，并且利用符号距离场的性质，通过求解基于逆有

限元分析的时空优化问题驱动有限元模型在仿真过程中与给定关键帧目标姿态相匹配。

本文的主要贡献在于提供了一种新的有限元模型关键帧位移的自动生成及插值方法，其对于各种不同输入类型具有普遍适用性。最后，本文只需要使用很少的空间存储得到的最优化的特征子空间的控制施力场以及材质信息就可以重建出连续平滑且匹配关键帧输入姿态的仿真运动，而无需耗费更多空间存储一序列的输出网格数据。

在以后的工作中，本文希望能够在提升准确性的同时提高优化的速度。准确性的损失主要来自于符号距离场重建的精度损失与六面体网格的近似能力，模型越细密则准确性越好，但是随之增长的时间复杂度是很难接受的，所以一个合适的六面体网格层次的选择十分重要。仿真过程中使用旋转应变坐标可以提升准确性，也同样会增加许多时间复杂度，所以本文也希望寻求更加简化的旋转应变坐标方法。

致谢

本文研究工作是在教育部博士点基金新教师项目(项目编号: 20131102120016)的资助下完成的。

参考文献

- [1] Li S, Huang J, Goes F D, et al. Space-Time Editing of Elastic Motion through Material Optimization and Reduction [J]. *Acm Transactions on Graphics*, 2014, 33(4):1-10.
- [2] Huang J, Tong Y, Zhou K, et al. Interactive Shape Interpolation through Controllable Dynamic Deformation. [J]. *IEEE Transactions on Visualization & Computer Graphics*, 2010, 17(7):983-992.

- [3] Zhang Z, Lu H, Ouyang Y, et al. Fast as-isometric-as-possible Shape Interpolation[J]. *Computers & Graphics*, 2015, 46(C):244-256.
- [4] Mcnamara A, Treuille A, Popović Z, et al. Fluid Control Using the Adjoint Method [J]. *Acm Transactions on Graphics*, 2010, 23(3):447-454.
- [5] Barbić J, Silva M D, Popović J. Deformable Object Animation Using Reduced Optimal Control[C]// 2009:341-352.
- [6] Hildebrandt K, Schulz C, Von Tycowicz C, et al. Interactive Spacetime Control of Deformable Objects [J]. *Acm Transactions on Graphics*, 2012, 31(4):71:1-71:8.
- [7] Alexa M, Cohen-Or D, Levin D. As-Rigid-As-Possible Shape Interpolation [C]// Proceedings of the 27th annual conference on Computer graphics and interactive techniques. ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co. 2000:157-164.
- [8] Kilian M. Geometric Modeling in Shape Space [J]. *Acm Transactions on Graphics*, 2007, 26(3):2007.
- [9] Y. S. Liu, H. B. Yan, and R. R. Martin. As-Rigid-As-Possible Surface Morphing [J]. *Journal of Computer Science and Technology*, 2011, 26(3):548-557.
- [10] Wang Zhen, Li Shuai. Modeling Method for Paper Deformation Based on Procedure Control [J]. *Journal of System Simulation*, 2011, 23(4):707-712. 郝爱民, 王振, 李帅. 一种基于过程控制的纸张变形建模方法[J]. *系统仿真学报*, 2011, 23(4):707-712. (Hao Ai-min,
- [11] Komatsu K. Human Skin Model Capable of Natural Shape Variation [J]. *The Visual Computer*, 1988, 3(5):265-271.
- [12] Lewis J P. Pose Space Deformation: A Unified Approach to Shape Interpolation and Skeleton-driven Deformation [C]// Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques. 2000:165-172.
- [13] Treuille A, Mcnamara A, Popović Z, et al. Keyframe Control of Smoke Simulations[J]. *Acm Transactions on Graphics*, 2003, 22(3):716-723.
- [14] Fattal R, Lischinski D. Target-Driven Smoke Animation [J]. *Acm Transactions on Graphics*, 2004, 23(3):págs. 439-446.
- [15] Yang B, Liu Y, You L, et al. Technical Section: A Unified Smoke Control Method Based on Signed Distance Field [J]. *Computers & Graphics*, 2013, 37(37):775-786.
- [16] Xia Q, Li S, Qin H, et al. Modal Space Subdivision for Physically-plausible 4D Shape Sequence Completion from Sparse Samples [J]. 2015.
- [17] Dick C, Georgii J, Westermann R. A Hexahedral Multigrid Approach for Simulating Cuts in Deformable Objects. [J]. *IEEE Transactions on Visualization & Computer Graphics*, 2010, 17(11):1663-1675.
- [18] Dick C, Georgii J, Westermann R. A Real-time Multigrid Finite Hexahedra Method for Elasticity Simulation Using CUDA [J]. *Simulation Modelling Practice & Theory*, 2011, 19(2):801-816.
- [19] Allard J, Cotin S, Faure F, et al. SOFA--An Open Source Framework for Medical Simulation. [J]. *Studies in Health Technology & Informatics*, 2007, 125(125): 13-8.
- [20] Allard J, Courtecuisse H, Faure F. Implicit FEM Solver on GPU for Interactive Deformation Simulation [J]. *Gpu Computing Gems Jade Edition*, 2011.
- [21] Yang C, Li S, Wang L, et al. Real-time Physical Deformation and Cutting of Heterogeneous Objects via Hybrid Coupling of Meshless Approach and Finite Element Method [J]. *Computer Animation and Virtual Worlds*, 2014, 25(3-4):421-433.
- [22] Krysl P, Lall S, Marsden J E. Dimensional Model Reduction in Non-linear Finite Element Dynamics of Solids and Structures [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, 51(4):479-504.
- [23] Pentland A, Williams J. Good Vibrations: Modal Dynamics for Graphics and Animation [C]// Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques, SIGGRAPH. 1989:207-214.
- [24] James D L, Pai D K. DyRT: Dynamic Response Textures for Real Time Deformation Simulation with Graphics Hardware [J]. *Acm Transactions on Graphics*, 2002, 21(3):582-585.
- [25] Choi M G, Ko H S. Modal warping: Real-time Simulation of Large Rotational Deformation and Manipulation. [J]. *IEEE Transactions on Visualization & Computer Graphics*, 2005, 11(1):91-101.
- [26] Barbić J. Real-time Reduced Large-deformation Models and Distributed Contact for Computer Graphics and Haptics [C]// Carnegie Mellon University, 2007.
- [27] Kim T, James D L. Skipping Steps in Deformable Simulation with Online Model Reduction[J]. *Acm Transactions on Graphics*, 2009, 28(5):89-97.
- [28] Pan Z, Bao H, Huang J. Subspace Dynamic Simulation Using Rotation-strain Coordinates [J]. *Acm Transactions on Graphics*, 2015, 34(6):1-12.

- [29] Hahn F, Thomaszewski B, Coros S, et al. Subspace Clothing Simulation Using Adaptive Bases[J]. *Acm Transactions on Graphics*, 2016, 33(4):1-9.
- [30] Yang C, Li S, Lan Y, et al. Coupling Time-varying Modal Analysis and FEM for Real-time Cutting Simulation of Objects with Multi-material Sub-domains [J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2016, 43:53-67.
- [31] Barentzen J A. On the Implementation of Fast Marching Methods for 3D Lattices [J]. Technical Report, 2001.
- [32] Zhao H. Fast Sweeping Method for Eikonal Equations[J]. *Mathematics of Computation*, 2005, 74(250):603-627.
- [33] Lipovetsky S. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing* (3rd ed.), by William H. Press; Saul A. Teukolsky; William T. Wetterling; Brian P. Flannery [J]. *Technometrics*, 2009(4):481-482.