

辛达拉姆发现：若自然数N出现在上面的数阵中，则2N+1不是素数；若N不在上面数阵中出现，则2N+1必定是素数[1].

本文应用辛达拉姆筛法探讨孪生素数是否无穷多.

记：K={2xy+x+y | x, y ∈ N⁺}, L={2xy+x+y-1 | x, y ∈ N⁺}, S={2xy+x+y-3 | x, y ∈ N⁺}.其中x≥1, y≥1为自然数. N⁺:1,2,3, ...为自然数.

因为(2m+1)n+m=2nm+n+m,记：K={2xy+x+y | x, y ∈ N⁺}, 所以

即有下述：设Q是正整数，则 2Q+1是素数<=> Q ∉ K

2. 基础知识

命题1 当Q=2xy+x+y, x、y均为自然数时，2Q+1是奇合数[2].

证明 ∴ 2Q+1=2 (2xy + x + y) +1=4xy+2x+2y+1=(2x+1)(2y+1)

显然：当x、y为自然数时，2x+1、2y+1是奇数,所以(2x+1)(2y+1)是奇合数.从而当Q=2xy+x+y时，2Q+1是奇合数，命题1成立.

于是可得到下面的命题[3]

命题2 奇合数的一切解可用下面公式给出：

$$H=4xy+2x+2y+1$$

其中x、y为自然数.

证明显然当x= 1、2、3、...自然数时，一切被3整除的奇合数公式是3 (2x+1);一切被5整除的奇合数公式是5 (2x+1);一切被7整除的奇合数公式是7 (2x+1);一切被9整除的奇合数公式是9 (2x+1);一切被(2y+1)整除的奇合数公式是(2y+1) (2x+1),其中y=1、2、3、...自然数.

∴(2y+1)(2x+1)=4xy+2x+2y+1 = H.

∴命题2成立

命题3 当正整数Q≠2xy+x+y时,2Q+1是奇素数集合.

证明 ∴由命题2可知，当正整数Q=2xy+x+y时，2Q+1是奇合数的集合.

又∴当Q≠2xy+x+y时，2Q+1也是奇数，且不在奇合数集合内.

∴当Q≠2xy+x+y时，2Q+1必是奇素数.

命题4 一切大于2的素数可以表示为[4]

$$p=2Q+1 \tag{1}$$

其中Q ∈ K取正整数.

证明 ∴由命题3可知，当Q≠2xy+x+y取正整数时，2Q+1是奇素数集合，素数中只有2是偶素数.

∴一切大于2的素数可用(1)表示.

又∴我们记：K={2xy+x+y | x, y ∈ N⁺}, 其中x≥1, y≥1为自然数. N⁺:1,2,3, ...为自然数.

∴即有下述：设Q是正整数，则 2Q+1 是大于2的素数<=> Q ∈ K

∴命题4成立，证毕.

命题5 一切孪生素数可表示为[5]

$$\begin{cases} 2Q+1 \\ 2(Q+1)+1 \end{cases} \tag{2}$$

其中Q ∈ K ∪ L取正整数.

所谓孪生素数，即：3、5；5、7；11、13；17、19；29、31；...两素数差2的素数组[5].

证明 ∴当Q≠2xy+x+y取正整数时，由命题3可知2Q+1是素数.同理当Q+1≠2xy+x+y取正整数时，由命题3可知2(Q+1)+1也是素数.

又∴2(Q+1)+1-(2Q+1)=2

∴当正整数Q≠2xy+x+y且Q+1≠2xy+x+y时，2Q+1与2(Q+1)+1的值都是孪生素数.

∴我们记：K={2xy+x+y | x, y ∈ N⁺}, L={2xy+x+y-1 | x, y ∈ N⁺}, 其中x≥1, y≥1为自然数. N⁺:1,2,3, ...为自然数.

∴即有下述：设Q是正整数，则 $\begin{cases} 2Q+1 \\ 2(Q+1)+1 \end{cases}$ 是孪生素数<=> Q ∈ K ∪ L

∴命题5成立，证毕.

命题6 一切三生素数可表示为[5]

$$\begin{cases} 2Q+1 \\ 2(Q+1)+1 \\ 2(Q+3)+1 \end{cases} \tag{3}$$

其中Q ∈ K ∪ L ∪ S取正整数.

所谓三生素数，即：5、7、11；11、13、17；17、19、23；41、43、47；...第1个素数与第2个素数差2，且第1个素数与第3个素数差6的素数组[6].

证明 ∴当Q≠2xy+x+y取正整数时，由命题3可知2Q+1是素数.同理当Q+1≠2xy+x+y取正整数时，由命题3可知2(Q+1)+1也是素数，当Q+3≠2xy+x+y取正整数时，由命题3可知2(Q+3)+1也是素数.

又∴2(Q+3)+1-(2Q+1)=6, 2(Q+1)+1-(2Q+1)=2

∴当正整数Q≠2xy+x+y且Q+1≠2xy+x+y、Q+3≠2xy+x+y时，2Q+1、2(Q+1)+1和2(Q+3)+1的值都是三生素数[7].

∴我们记：K={2xy+x+y | x, y ∈ N⁺}, L={2xy+x+y-1 | x, y ∈ N⁺}, S={2xy+x+y-3 | x, y ∈ N⁺}.其中x≥1, y≥1为自然数. N⁺:1,2,3, ...为自然数.

∴即有下述：设Q是正整数，则 $\begin{cases} 2Q+1 \\ 2(Q+1)+1 \\ 2(Q+3)+1 \end{cases}$ 是三生素数<=> Q ∈ K ∪ L ∪ S

∴命题6成立，证毕.

显然由命题4、命题5、命题6可作下列定义：

定义1 称不属于K的正整数为奇素数的根.

定义2 称不属于K且又不属于L的正整数为孪生素数的根.

定义3 称不属于K且又不属于L同时还属于S的正整数为三生素数的根.

3. 用辛达拉姆筛法求奇素数

设 x, y 为自然数时, 按从小到大的顺序将 $2xy+x+y$ 的值排列如下(由辛达拉姆表可知) [1]:

4、7、10、12、13、16、17、19、22 ...,

与上面对应余下来的正整数就是(1)中奇素数根 Q 的值.

即 $Q=1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 14, 15, 18, 20, 21, \dots$

将 $Q=1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 14, 15, 18, 20, 21, \dots$ 分别代入(1)得: 3、5、7、11、13、17、19、23、29、31、37、41、43、...其都是奇素数.

4. 用辛达拉姆筛法求孪生素数

设 x, y 为自然数时, 按从小到大的顺序将 $2xy+x+y$ 的值排列如下(由辛达拉姆表可知) [1]:

4、7、10、12、13、16、17、19、22 ...,

则按从小到大的顺序将 $2xy+x+y-1$ 的值排列如下

3、6、9、11、12、15、16、18、21 ...,

再将 $2xy+x+y$ 和 $2xy+x+y-1$ 两式中的值按顺序从小到大排列如下:

3、4、6、7、9、10、11、12、13、15、16、17、18、19、21、22 ...,

与上面对应余下的正整数就是(2)中孪生素数根 Q 的值.

即 $Q=1, 2, 5, 8, 14, 20, \dots$,

将 $Q=1, 2, 5, 8, 14, 20, \dots$ 分别代入(2)得: 3、5、7、11、13、17、19、29、31、41、43、...其都是孪生素数.

5. 用辛达拉姆筛法求三生素数

设 x, y 为自然数时, 按从小到大的顺序将 $2xy+x+y$ 的值排列如下(由辛达拉姆表可知) [1]:

4、7、10、12、13、16、17、19、22 ...,

则按从小到大的顺序将 $2xy+x+y-1$ 的值排列如下

3、6、9、11、12、15、16、18、21 ...,

按从小到大的顺序将 $2xy+x+y-3$ 的值排列如下

1、4、7、9、10、13、14、16、19 ...,

再将 $2xy+x+y, 2xy+x+y-1$ 和 $2xy+x+y-3$ 三式中的值按顺序从小到大排列如下:

1、3、4、6、7、9、10、11、12、13、14、15、16、17、18、19、21、22、...

与上面对应余下的正整数就是(3)中三生素数根 Q 的值.

即 $Q=2, 5, 8, 20, \dots$

将 $Q=2, 5, 8, 20, \dots$ 分别代入(3)得: 5、7、11; 11、13、17; 17、19、23; 41、43、47; ...其都是三生素数.

6. 六个通解式

$\because 2xy+x+y=(2x+1)y+x$, 当 $x=1,2,3,4,5,6\dots$ 时 ,
 $(2x+1)y+x=3y+1; 5y+2; 7y+3; 9y+4; 11y+5; 13y+6; 15y+7; 17y+8;\dots$

$\therefore 2xy+x+y$ 的 $an+b$ 型全体子集可分为两种类型: 一种 y 的系数是3, 5, 7, 11, 13, 17...奇素数的集合称为 K 的 $an+b$ 型奇素数类集合.另一种 y 的系数是9, 15, 21...奇合数的集合称为 K 的 $an+b$ 型奇合数类集合[8].

同理当 $x=1,2,3,4,5,6\dots$ 时, $(2x+1)y+x-1=3y; 5y+1; 7y+2; 9y+3; 11y+4; 13y+5; 15y+6; 17y+7\dots$

我们可以将 y 的系数是3, 5, 7, 11, 13, 17...奇素数的集合称为 L 的 $an+b$ 型奇素数类集合.将 y 的系数是9, 15, 21...奇合数的集合称为 L 的 $an+b$ 型奇合数类集合[9].

同理当 $x=1,2,3,4,5,6\dots$ 时, $(2x+1)y+x-3=3y-2; 5y-1; 7y; 9y+1; 11y+2; 13y+3; 15y+4; 17y+5\dots$

我们可以将 y 的系数是3, 5, 7, 11, 13, 17...奇素数的集合称为 S 的 $an+b$ 型奇素数类集合.将 y 的系数是9, 15, 21...奇合数的集合称为 S 的 $an+b$ 型奇合数类集合.

显然 $2xy+x+y$ 的 $an+b$ 型奇素数、奇合数类集合是 K 的子集, 也是 $K \cup L \cup S$ 的子集. $2xy+x+y-1$ 的 $an+b$ 型奇素数、奇合数类集合是 L 的子集, 也是 $K \cup L \cup S$ 的子集. $2xy+x+y-3$ 的 $an+b$ 型奇素数、奇合数类集合是 S 的子集, 也是 $K \cup L \cup S$ 的子集.

为了证明后面命题我们还要先分别求出 $2xy+x+y, 2xy+x+y-1$ 和 $2xy+x+y-3$ 的 $an+b$ 型奇素数类子集通解和奇合数类子集通解.

6.1. 求 $2xy+x+y, 2xy+x+y-1$ 和 $2xy+x+y-3$ 的 $an+b$ 型奇素数类子集通解[10]

$\because 2xy+x+y=(2x+1)y+x, 2xy+x+y-1=(2x+1)y+x-1, 2xy+x+y-3=(2x+1)y+x-3,$

$$\text{当 } 2x+1=p \text{ 时, } x = \frac{p-1}{2}$$

$$\text{将 } x = \frac{p-1}{2} \text{ 代人 } (2x+1)y+x, \text{ 得}$$

$$py + \frac{p-1}{2} \tag{4}$$

其中 $p \geq 3$ 为奇素数, $y \geq 1$ 为自然数.

$$\text{将 } x = \frac{p-1}{2} \text{ 代人 } (2x+1)y+x-1, \text{ 得}$$

$$py + \frac{p-1}{2} - 1 \tag{5}$$

其中 $p \geq 3$ 为奇素数, $y \geq 1$ 为自然数.

$$\text{将 } x = \frac{p-1}{2} \text{ 代人 } (2x+1)y+x-3, \text{ 得}$$

$$py + \frac{p-1}{2} - 3 \tag{6}$$

其中 $p \geq 7$ 为奇素数, $y \geq 1$ 为自然数.

∴ $2xy+x+y$ 的 $an+b$ 型奇素数类子集通解是(4), $2xy+x+y-1$ 的 $an+b$ 型奇素数类子集通解是(5), $2xy+x+y-3$ 的 $an+b$ 型奇素数类子集通解是(6).

6.2. 求 $2xy+x+y$, $2xy+x+y-1$ 和 $2xy+x+y-3$ 的 $an+b$ 型奇合数类子集通解

∴ 当 $x=1,2,3,4,5,6\dots$ 时,
 $(2x+1)y+x=3y+1; 5y+2; 7y+3; 9y+4; 11y+5; 13y+6;$
 $15y+7; 17y+8;\dots$

记: $2xy+x+y$ 的 $an+b$ 型全体子集可分为两种类型: 一种 y 的系数是 3, 5, 7, 11, 13, 17... 奇素数的集合称为 K 的 $an+b$ 型奇素数类集合. 另一种 y 的系数是 9, 15, 21... 奇合数的集合称为 K 的 $an+b$ 型奇合数类集合.

显然 $3y+1; 5y+2; 7y+3; 11y+5; 13y+6; 17y+8;\dots$ 的系数是 3, 5, 7, 11, 13, 17... 奇素数的 $an+b$ 型集合, 也可以用下列通式表示[11]:

$$Pn + \frac{p-1}{2}$$

其中 $p \geq 3$ 为奇素数, $n \geq 1$ 为自然数.

显然当 n 取值与 (4) 中 y 的值相同时, 上式与 (4) 全等.

同理, 因为 9、15、21、25、27、... 奇合数可以用 $p_1 p_2 p_3 \dots p_k$ (其中 $P_1 \leq P_2 \leq \dots \leq P_K$ 取奇素数) 表示.

所以 $9y+4; 15y+7; 21y+10; 25y+12; 27y+13; 33y+16;\dots$ 的系数是 9, 15, 21, 25, 27, 33... 奇合数的 $an+b$ 型集合可以用下列代数式表示[12]:

$$p_1 p_2 p_3 \dots p_k n + \frac{p_1 p_2 \dots p_k - 1}{2} \text{ (其中 } P_1 \leq P_2 \leq \dots \leq P_K \text{ 取奇素数、} n \geq 1 \text{ 取正整数)}$$

显然: 当上式以 p ($p \geq 3$ 取素数) 取模时, 由剩余理论可知[13], 可将上式可分解成一组完全剩余系如下 (即分成由 p 个子集合之并且除 p 余 0、1、2、... $p-1$ 各一个, 共分成 p 个子集合). 即:

$$\{p_1 p_2 \dots p_k n + \frac{p_1 p_2 \dots p_k - 1}{2} \mid n \in N^+\} \cup \{p_1 p_2 \dots p_k n_1 + \frac{p_1 p_2 \dots p_k - 1}{2} \mid n_1 \in N^+\} \cup \{p_1 p_2 \dots p_k n_1 + p_1 p_2 \dots p_k + \frac{p_1 p_2 \dots p_k - 1}{2} \mid n_1 \in N^+\} \cup \{p_1 p_2 \dots p_k n_1 + 2p_1 p_2 \dots p_k + \frac{p_1 p_2 \dots p_k - 1}{2} \mid n_1 \in N^+\} \cup \dots \cup \{p_1 p_2 \dots p_k n_1 + (p-1)p_1 p_2 \dots p_k + \frac{p_1 p_2 \dots p_k - 1}{2} \mid n_1 \in N^+\}$$

由此, 依据上式等号右边的一组完全剩余系可推出以下通解

$2xy+x+y$ 除 p 余 0、1、2、3、...、 $p-1$ 的全体 $an+b$ 型奇合数类子集通解式[13]

$$\begin{cases} p p_1 p_2 \dots p_k n_1 + \frac{p_1 p_2 \dots p_k - 1}{2} \\ p p_1 p_2 \dots p_k n_1 + p_1 p_2 \dots p_k + \frac{p_1 p_2 \dots p_k - 1}{2} \\ p p_1 p_2 \dots p_k n_1 + 2 p_1 p_2 \dots p_k + \frac{p_1 p_2 \dots p_k - 1}{2} \\ \vdots \\ p p_1 p_2 \dots p_k n_1 + (p-1) p_1 p_2 \dots p_k + \frac{p_1 p_2 \dots p_k - 1}{2} \end{cases} \quad (7)$$

其中 p_1, p_2, \dots, p_k 均不等于 p , 且 $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_k$ 均为奇素数, $n_1 \geq 0, x \geq 1, y \geq 1$ 为自然数.

同理 $2xy+x+y-1$ 除 p 余 0、1、2、3、...、 $p-1$ 的全体 $an+b$ 型奇合数类子集通解

$$\begin{cases} p p_1 p_2 \dots p_k n_1 + \frac{p_1 p_2 \dots p_k - 1}{2} - 1 \\ p p_1 p_2 \dots p_k n_1 + p_1 p_2 \dots p_k + \frac{p_1 p_2 \dots p_k - 1}{2} - 1 \\ p p_1 p_2 \dots p_k n_1 + 2 p_1 p_2 \dots p_k + \frac{p_1 p_2 \dots p_k - 1}{2} - 1 \\ \vdots \\ p p_1 p_2 \dots p_k n_1 + (p-1) p_1 p_2 \dots p_k + \frac{p_1 p_2 \dots p_k - 1}{2} - 1 \end{cases} \quad (8)$$

其中 $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k, n_1, x, y$ 与 (7) 中要求一致.

同理 $2xy+x+y-3$ 除 p 余 0、1、2、3、...、 $p-1$ 的全体 $an+b$ 型奇合数类子集通解[14]

$$\begin{cases} p p_1 p_2 \dots p_k n_1 + \frac{p_1 p_2 \dots p_k - 1}{2} - 3 \\ p p_1 p_2 \dots p_k n_1 + p_1 p_2 \dots p_k + \frac{p_1 p_2 \dots p_k - 1}{2} - 3 \\ p p_1 p_2 \dots p_k n_1 + 2 p_1 p_2 \dots p_k + \frac{p_1 p_2 \dots p_k - 1}{2} - 3 \\ \vdots \\ p p_1 p_2 \dots p_k n_1 + (p-1) p_1 p_2 \dots p_k + \frac{p_1 p_2 \dots p_k - 1}{2} - 3 \end{cases} \quad (9)$$

其中: ∴ 当 $p_1 p_2 p_3 \dots p_k < 7$ 时, $\frac{p_1 p_2 \dots p_k - 1}{2} - 3 < 0$,

(9) 中第 1 个集合是 $an-b$ 的集合.

∴ 只有 $p_1 p_2 p_3 \dots p_k \geq 7$, (9) 才全部是 $an+b$ 的集合.

p_1, p_2, \dots, p_k 均不等于 p , 且 $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_k$ 均为奇素数, $n_1 \geq 0, x \geq 1, y \geq 1$ 为自然数.

又 ∴ 本文记: $K = \{2xy+x+y \mid x, y \in N^+\}$, $L = \{2xy+x+y-1 \mid x, y \in N^+\}$, $S = \{2xy+x+y-3 \mid x, y \in N^+\}$, 其中 $x, y \geq 1$ 为自然数. $N^+ : 1, 2, 3, \dots$ 为自然数.

- ∴ (7) 是K的an+b型奇合数类子集通解.
- (8) 是L的an+b型奇合数类子集通解.
- (9) 是S的an+b型奇合数类子集通解.
- ∴ (7)、(8)、(9)是K∪L∪S的an+b型奇合数类子集通解.

7. 预备命题

命题7: K∪L的an+b型奇合数类子集有且仅有(7)、(8)通解.

证明: 假设K∪L除(7)、(8)以外还有an+b型奇合数类子集通解.

∴由唯一分解定理可知[15], an+b型奇合数类中n的系数a每一个数, 如果不计素因数的分解次序, 则它分解素因数的结果是唯一的.

∴若K∪L除(7)、(8)以外还有新的an+b型奇合数类子集通解, 则式中n₁的系数必与(7)、(8)中的n₁系数相同, 只有余数不同, 则可写成如下形式:

$$\begin{cases} pp_1p_2 \cdots p_k n_1 + \frac{p_1p_2 \cdots p_k - 1}{2} - j \\ pp_1p_2 \cdots p_k n_1 + p_1p_2 \cdots p_k + \frac{p_1p_2 \cdots p_k - 1}{2} - j \\ pp_1p_2 \cdots p_k n_1 + 2p_1p_2 \cdots p_k + \frac{p_1p_2 \cdots p_k - 1}{2} - j \\ \vdots \\ pp_1p_2 \cdots p_k n_1 + (p-1)p_1p_2 \cdots p_k + \frac{p_1p_2 \cdots p_k - 1}{2} - j \end{cases} \quad (10)$$

其中 p₁、p₂、p₃、⋯、p_k、n₁、x、y 要求与前一致.

∴ 当j=0时, (10) 与 (7) 一致;

当j=1时, (10) 与 (8) 一致.

∴ j≠0, j≠1.

又∴当j≠0, j≠1时, 由命题1可知, 当Q≠2xy+x+y, Q+1≠2xy+x+y, Q+j≠2xy+x+y时, 2Q+1, 2(Q+1)+1, 2(Q+j)+1是三个奇素数, 已超出孪生素数. 例如当j=3时, 是三生素数(3)式.

∴出现矛盾, 假设不成立.

∴命题7成立.

8. 用辛达拉姆筛法证明孪生素数无穷多

我们先从下列例题中找出一个规律, 可用这个规律引入孪生素数无穷多的等价命题,

例1 当p=5时, 在3n、3n+1、3n+2三个集合中:

- 1). 将n=1代入3n+2得5, 将Q=5代入(2)得: 11、13;

因为11、13是孪生素数, 则5是孪生素数根, 所以当n≥1取正整数时, 3n、3n+1、3n+2三个集合中: 至少有1个集合是含有孪生素数根的集合.

例2 当p=5时, 在5n、5n+1、5n+2、5n+3、5n+4五个集合中:

- 1). 将n=1代入5n得5, 将Q=5代入(2)得: 11、13;
- 2). 将n=1代入5n+3得8, 将Q=8代入(2)得: 17、19;
- 3). 将n=2代入5n+4得14, 将Q=14代入(2)得: 29、31;

因为11、13; 17、19; 29、31都是孪生素数, 则5、8、14都是孪生素数根, 所以当n≥1取正整数时, 在5n、5n+1、5n+2、5n+3、5n+4五个集合中: 至少有3个集合是含有孪生素数根的集合.

例3 当p=7时, 在7n、7n+1、7n+2、7n+3、7n+4、7n+5、7n+6七个集合中:

- 1). 将n=2代入7n得14, 将Q=14代入(2)得: 29、31;
- 2). 将n=1代入7n+1得8, 将Q=8代入(2)得: 17、19;
- 3). 将n=7代入7n+4得53, 将Q=53代入(2)得: 107、109;
- 4). 将n=9代入7n+5得68, 将Q=68代入(2)得: 137、139;
- 5). 将n=2代入7n+6得20, 将Q=20代入(2)得: 41、43;

因为29、31; 17、19; 107、109; 137、139; 41、43都是孪生素数, 则14、8、53、68、20都是孪生素数根, 所以当n≥1取正整数时, 在7n、7n+1、7n+2、7n+3、7n+4、7n+5、7n+6七个集合中: 至少有5个集合是含有孪生素数根的集合.

例4 当p=11时, 在11n、11n+1、11n+2、11n+3、11n+4、11n+5、11n+6、11n+7、11n+8、11n+9、11n+10十一个集合中:

- 1). 将n=19代入11n得209, 将Q=209代入(2)得: 419、421;
- 2). 将n=8代入11n+1得89, 将Q=89代入(2)得: 179、181;
- 3). 将n=3代入11n+2得35, 将Q=35代入(2)得: 71、73;
- 4). 将n=10代入11n+3得113, 将Q=113代入(2)得: 227、229;
- 5). 将n=4代入11n+6得50, 将Q=50代入(2)得: 101、103;
- 6). 将n=2代入11n+7得29, 将Q=29代入(2)得: 59、61;
- 7). 将n=6代入11n+8得74, 将Q=74代入(2)得: 149、151;
- 8). 将n=4代入11n+9得53, 将Q=53代入(2)得: 107、109;
- 9). 将n=8代入11n+10得98, 将Q=98代入(2)得: 197、199;

因为419、421; 179、181; 71、73; 227、229; 101、103; 59、61; 149、151; 107、109; 197、199都是孪生素数, 则209、89、35、113、50、29、74、53、98都是孪生素数根, 所以当n≥1取正整数时, 在11n、11n+1、11n+2、11n+3、11n+4、11n+5、11n+6、11n+7、11n+8、11n+9、11n+10十一个集合中: 至少有9个集合是含有三生素数根的集合[16].

由以上例1、例2、例3、例4我们引入一个与孪生素数无穷多的等价命题如下:

命题8: 当 $p \geq 3$ 为素数, $n \geq 1$ 为自然数时, 在 $pn, pn+1, pn+2, \dots, pn+p-1$ 的 p 个剩余类集合中, 至少有 $p-2$ 个是含有孪生素数根的集合.

\therefore 当 $p \geq 3$ 为素数, $n \geq 1$ 为自然数时, $pn, pn+1, pn+2, \dots, pn+p-1$ 的 p 个剩余类集合中值不重复.

又 \because 素数有无穷多, 素数只有2是偶数, 则奇素数无穷多, 则奇素数 $p-2$ 还是无穷多个. 从而若有无穷多个含孪生素数根的集合, 就可得到无穷多个孪生素数.

\therefore 若命题8成立, 则孪生素数就有无穷多.

\therefore 命题8与孪生素数无穷多命题是等价命题.

命题8的证明思路:

显然, 当 $p \geq 3$ 为素数, $n \geq 1$ 取正整数时, 如果将 $pn, pn+1, pn+2, \dots, pn+p-1$ 的 p 个剩余类集合分别以 $m \neq p$ ($m \geq 3$ 取素数)为模, 则由完全剩余系理论可知, 若 $pn, pn+1, pn+2, \dots, pn+p-1$ 的 p 个剩余类集合有几个集合是 $K \cup L$ 的子集, 则在 $K \cup L$ 中必然有几组与 m 相对应的, 且除 m 余0、1、2、...、 $m-1$ 的完全剩余系, 用这种方法可以证明命题8成立.

8.1. 分析 $3n, 3n+1, 3n+2$ 与 $K \cup L$ 的关系

8.1.1. 分析 $3n$ 与 $K \cup L$ 的关系

第1种方法

\therefore 当 $y=1$ 时 $2xy+x+y-1=3x$, 则 $3x$ 是 $2xy+x+y-1$ 的子集.

\therefore 当 $n \geq 1$ 取整数时, $3n$ 是 $\{2xy+x+y \mid x, y \in N^+\} \cup \{2xy+x+y-1 \mid x, y \in N^+\}$ 的子集.

第2种方法

将 $y=n$, $p=3$ 代入(5)得:

$3n$

\therefore (5)式是 $2xy+x+y-1$ 的 $an+b$ 型奇素数类集合通解式.

又 \because 本文记: $L = \{2xy+x+y-1 \mid x, y \in N^+\}$, 其中 $x \geq 1$, $y \geq 1$ 为自然数. $N^+ : 1, 2, 3, \dots$ 为自然数.

$\therefore n \geq 1$ 取整数时, $3n$ 是 L 的子集.

$\therefore n \geq 1$ 取整数时, $3n$ 是 $K \cup L$ 的子集.

第3种方法

\therefore 当 $n \geq 1$ 取整数时, 若 $3n$ 是 $K \cup L$ 的子集. 则由完全剩余系理论可知[17], 有以下结果:

第1, 当 $n \geq 1$ 取整数, $n_1 \geq 1$ 取整数时, 若 $3n$ 是 $K \cup L$ 的子集, 则 $15n_1, 15n_1+3, 15n_1+6, 15n_1+9, 15n_1+12$ 也是 $K \cup L$ 的子集(因为 $\{15n_1 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{15n_1+3 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{15n_1+6 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{15n_1+9 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{15n_1+12 \mid n_1 \in N^+\} = \{3n \mid n \in N^+\}$, 即与将 $3n$ 以5为模, 由完全剩余系理论可知, $3n$ 必定分成1组除5余0, 1, 2, 3, 4完全剩余系相同).

第2, 当 $n \geq 1$ 取整数, $n_1 \geq 1$ 取整数时, 若 $3n$ 是 $K \cup L$ 的子集, 则 $21n_1, 21n_1+3, 21n_1+6, 21n_1+9, 21n_1+12, 21n_1+15, 21n_1+18$ 也是 $K \cup L$ 的子集(因为 $\{21n_1 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{21n_1+3 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{21n_1+6 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{21n_1+9 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{21n_1+12 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{21n_1+15 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{21n_1+18 \mid n_1 \in N^+\} = \{3n \mid n \in N^+\}$, 即与将 $3n$ 以7为模, 由完全剩余系理论可知, $3n$ 必定分成1组除7余0, 1, 2, 3, 4, 5, 6完全剩余系相同).

$N^+ \} \cup \{21n_1+18 \mid n_1 \in N^+\} = \{3n \mid n \in N^+\}$, 即与将 $3n$ 以7为模, 由完全剩余系理论可知, $3n$ 必定分成1组除7余0, 1, 2, 3, 4, 5, 6完全剩余系相同).

等等有很多类似第1和第2的结果, 下面分析 $K \cup L$ 中有没有第1和第2的结果.

\therefore 将 $p_1 p_2 \cdots p_k = 3, p=5$ 代入(8)得:

$15n_1, 15n_1+3, 15n_1+6, 15n_1+9, 15n_1+12$ 共5个 $an+b$ 型奇合数类子集.

显然 $\{15n_1 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{15n_1+3 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{15n_1+6 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{15n_1+9 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{15n_1+12 \mid n_1 \in N^+\} = \{3n \mid n \in N^+\}$.

又 \because (8) 是 $K \cup L$ 的 $an+b$ 型奇素数类集合通解式之一.

\therefore 当 $n \geq 1$ 取整数时, 若 $3n$ 是 $K \cup L$ 的子集. 则当 $n_1 \geq 1$ 取整数时 $15n_1, 15n_1+3, 15n_1+6, 15n_1+9, 15n_1+12$ 也是 $K \cup L$ 的子集, 第1结果成立.

下面讨论第2结果

\therefore 将 $p_1 p_2 \cdots p_k = 3, p=7$ 代入 (8) 得:

$21n_1, 21n_1+3, 21n_1+6, 21n_1+9, 21n_1+12, 21n_1+15, 21n_1+18$

显然 $\{21n_1 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{21n_1+3 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{21n_1+6 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{21n_1+9 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{21n_1+12 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{21n_1+15 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{21n_1+18 \mid n_1 \in N^+\} = \{3n \mid n \in N^+\}$.

又 \because (8) 是 $K \cup L$ 的 $an+b$ 型奇素数类集合通解式之一.

\therefore 当 $n \geq 1$ 取整数时, 若 $3n$ 是 $K \cup L$ 的子集. 则当 $n_1 \geq 1$ 取整数时, $21n_1, 21n_1+3, 21n_1+6, 21n_1+9, 21n_1+12, 21n_1+15, 21n_1+18$ 也是 $K \cup L$ 的子集, 第2结果成立.

8.1.2. 分析 $3n+1$ 与 $K \cup L$ 的关系

第1种方法

\therefore 当 $y=1$ 时 $2xy+x+y=3x+1$; 则 $3x+1$ 是 $2xy+x+y$ 的子集 [18].

\therefore 当 $n \geq 1$ 取整数时, $3n+1$ 是 $\{2xy+x+y \mid x, y \in N^+\} \cup \{2xy+x+y-1 \mid x, y \in N^+\}$ 的子集.

$\therefore n \geq 1$ 取整数时, $3n+1$ 是 $K \cup L$ 的子集.

第2种方法

将 $y=n$, $p=3$ 代入(4)得:

$3n+1$

\therefore (4)是 $2xy+x+y$ 的 $an+b$ 型奇素数类集合通解式.

又 \because 本文记: $K = \{2xy+x+y \mid x, y \in N^+\}$, 其中 $x \geq 1, y \geq 1$ 为自然数. $N^+ : 1, 2, 3, \dots$ 为正自然数.

$\therefore n \geq 1$ 取整数时, $3n+1$ 是 K 的子集.

$\therefore n \geq 1$ 取整数时, $3n+1$ 是 $K \cup L$ 的子集.

第3种方法与讨论 $3n$ 的第3种方法一样, 比较长略去:

8.1.3. 分析 $3n+2$ 与 $K \cup L$ 的关系

第1种方法:

\because 当 $n=1$ 时, 则 $Q=3n+2=3 \times 1+2=5$, 将 $Q=5$ 代入(2)式得: 11, 13.

因为11,13是孪生素数, 则5是孪生素数的根.

\therefore 当 $n \geq 1$ 取整数时, $3n+2$ 是含有素数的根的集合.

又 \because 由命题2可知, 含孪生素数根的集合必然不是 $K \cup L$ 子集合.

\therefore 当 $n \geq 1$ 取整数时 $3n+2$ 不是 $K \cup L$ 的子集.

第2种方法:

\because 当 $y=1$ 时 $2xy+x+y=3x+1; 2xy+x+y-1=3x$, 即: 当 $x \geq 1$ 取整数时 $3x+1$ 是 $2xy+x+y$ 的子集, $3x$ 是 $2xy+x+y-1$ 的子集[19].

\therefore 当 $x \geq 1$ 取整数时 $3x+1$ 和 $3x$ 是不含孪生素数根的集合, 从而 $n \geq 1$ 取整数时 $3n+1$ 和 $3n$ 也是不含孪生素数根的集合.

于是 $3n+2$ 是含有素数的根的集合(因孪生素数根只能在1, 2和 $3n+2$ 之中).

又 \because 由命题2可知, 含孪生素数根的集合必然不是 $K \cup L$ 子集.

\therefore 当 $n \geq 1$ 取整数时 $3n+2$ 不是 $K \cup L$ 的子集合.

第3种方法:

\because 当 $n \geq 1$ 取整数时, 若 $3n+2$ 是 $K \cup L$ 的子集合.则由完全剩余系理论可知, 有以下结果:

第1, 当 $n_1 \geq 1$ 取整数时, 由 $15n_1+2, 15n_1+5, 15n_1+8, 15n_1+11, 15n_1+14$ 五个集合组成的一组除5余0, 1, 2,3,4完全剩余系也必定在 $K \cup L$ 中(因为将 $3n+2$ 以5为模, 由完全剩余系理论可知, $3n+2$ 必定分成1组除5余0, 1, 2,3,4完全剩余系如下[20]:

$$\{3n+2 \mid n \in N^+\} = \{15n_1+2 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{15n_1+5 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{15n_1+8 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{15n_1+11 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{15n_1+14 \mid n_1 \in N^+\}.$$

第2, 当 $n_1 \geq 1$ 取整数时, 由 $21n_1+2, 21n_1+5, 21n_1+8, 21n_1+11, 21n_1+14, 21n_1+17, 21n_1+20$ 七个集合组成的一组除7余0,1,2,3,4,5,6完全剩余系也必定在 $K \cup L$ 中(因为将 $3n+2$ 以7为模, 由完全剩余系理论可知, $3n+2$ 必定分成1组除7余0,1,2, 3,4,5,6完全剩余系如下:

$$\{3n+2 \mid n \in N^+\} = \{21n_1+2 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{21n_1+5 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{21n_1+8 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{21n_1+11 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{21n_1+14 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{21n_1+17 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{21n_1+20 \mid n_1 \in N^+\}.$$

等等有很多类似第1和第2的结果.下面分析 $K \cup L$ 中有没有第1和第2的结果, 从而也可以证明, 当 $n \geq 1$ 取整数时 $3n+2$ 是不是 $K \cup L$ 的子集合.

$\because 15n_1+2, 15n_1+5, 15n_1+8, 15n_1+11, 15n_1+14$ 和 $21n_1+2, 21n_1+5, 21n_1+8, 21n_1+11, 21n_1+14, 21n_1+17, 21n_1+20$ 都是 $an+b$ 型奇合数类子集合.

由前面预备命题已证明 $K \cup L$ 的所有 $an+b$ 型奇合数类子集合可表为(7)、(8), 即 $K \cup L$ 的所有 $an+b$ 型奇合数类子集合都在(7)、(8)中.

\therefore 假设当 $n \geq 1$ 取整数时 $3n+2$ 是 $K \cup L$ 的子集合, 则推出 $15n_1+2, 15n_1+5, 15n_1+8, 15n_1+11, 15n_1+14$ 和 $21n_1+2, 21n_1+5, 21n_1+8, 21n_1+11, 21n_1+14, 21n_1+17, 21n_1+20$ 都在(7)、(8)中.

先在(7)、(8)中寻找 $15n_1+2, 15n_1+5, 15n_1+8, 15n_1+11, 15n_1+14$

显然由(7), (8)可知, 当 n_1 的系数是15时, 有且仅有 $p_1 p_2 \cdots p_k = 3, p=5$ 和 $p_1 p_2 \cdots p_k = 5, p=3$ 情形:

(i) $p_1 p_2 \cdots p_k = 3, p=5$

将 $p_1 p_2 \cdots p_k = 3, p=5$ 代入(7)得: $15n_1+1, 15n_1+4, 15n_1+7, 15n_1+10, 15n_1+13.$

将 $p_1 p_2 \cdots p_k = 3, p=5$ 代入(8)得: $15n_1, 15n_1+3, 15n_1+6, 15n_1+9, 15n_1+12.$

(ii) $p_1 p_2 \cdots p_k = 5, p=3$

将 $p_1 p_2 \cdots p_k = 5, p=3$ 代入(7)得: $15n_1+2, 15n_1+7, 15n_1+12.$

将 $p_1 p_2 \cdots p_k = 5, p=3$ 代入(8)得: $15n_1+1, 15n_1+6, 15n_1+11.$

\therefore 显然从(i); (ii)所述中只找到 $15n_1+2, 15n_1+11.$

缺少 $15n_1+5, 15n_1+8, 15n_1+14.$

说明在 $K \cup L$ 中不存在由 $15n_1+2, 15n_1+5, 15n_1+8, 15n_1+11, 15n_1+14$ 这一组除5余0,1,2,3,4的完全剩余系.

出现矛盾.假设不成立.

$\therefore 3n+2$ 不是 $K \cup L$ 的子集.

用同样方法也可以证明在 $K \cup L$ 中不存在由 $21n_1+2, 21n_1+5, 21n_1+8, 21n_1+11, 21n_1+14, 21n_1+17, 21n_1+20$ 七个集合组成的一组除7余0,1,2,3,4,5,6完全剩余系, 方法与上类同, 也可以证明 $3n+2$ 不是 $K \cup L$ 的子集, 略去.

例如: 当 $n=1$ 时, 则 $Q=3n+2=3 \times 1+2=5$, 将 $Q=5$ 代入(2)式得: 11, 13.

因为11,13是孪生素数组, 则5是孪生素数的根.

所以当 $n \geq 1$ 取正整数时, $3n+2$ 集合是含有素数的根的集合.

又 \because 由命题2可知, 含孪生素数根的集合必然不是 $K \cup L$ 子集合.

\therefore 当 $n \geq 1$ 取正整数时 $3n+2$ 不是 $K \cup L$ 的子集.

用第3种证明 $3n+2$ 不是 $K \cup L$ 子集的方法, 同样可证明 $5n, 5n+3, 5n+4, 7n$ 等等不是 $K \cup L$ 子集.显然 n 的系数越大, 证明越长, 显然不能证明全部素数.但是, 从第3种证明 $3n+2$ 不是 $K \cup L$ 子集的方法就比较容易理解下面的证明.

8.2. p=3

第1步: 分析 $3n, 3n+1, 3n+2$ 分别以5为模的结果[21].

将 $3n, 3n+1, 3n+2$ 以5为模, 由完全剩余系理论可得3组除5余0,1,2,3,4的完全剩余系, 即:

$$\{3n \mid n \in N^+\} = \{15n_1 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{15n_1+3 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{15n_1+6 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{15n_1+9 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{15n_1+12 \mid n_1 \in N^+\}$$

$$\{3n+1 \mid n \in N^+\} = \{15n_1+1 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{15n_1+4 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{15n_1+7 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{15n_1+10 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{15n_1+13 \mid n_1 \in N^+\}$$

$$\{3n+2 \mid n \in N^+\} = \{15n_1+2 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{15n_1+5 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{15n_1+8 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{15n_1+11 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{15n_1+14 \mid n_1 \in N^+\}$$

合计共得到15个 n_1 系数都是15的an+b型奇合数类集合,组成了3组除5余0,1,2,3,4完全剩余系,其特点是:

除5余0占3个;

除5余1占3个;

除5余2占3个;

除5余3占3个;

除5余4占3个;

合计共得到15个 n_1 系数都是15的an+b型奇合数类集合,组成了3组除5余0,1,2,3,4完全剩余系.

第2步,从(7),(8)中寻找所有 n_1 的系数是15的an+b型奇合数类的集合.

显然由(7),(8)式可知,当 n_1 的系数是15时,有且仅有 $p_1 p_2 \cdots p_k = 3, p=5$ 和 $p_1 p_2 \cdots p_k = 5, p=3$ 情形:

8.2.1. $p_1 p_2 \cdots p_k = 3, p=5$

将 $p_1 p_2 \cdots p_k = 3, p=5$ 代入(7)式得: $15n_1+1, 15n_1+4, 15n_1+7, 15n_1+10, 15n_1+13$ 共5个集合且除5余0,1,2,3,4各一个.

将 $p_1 p_2 \cdots p_k = 3, p=5$ 代入(8)式得: $15n_1, 15n_1+3, 15n_1+6, 15n_1+9, 15n_1+12$, 共5个集合且除5余0,1,2,3,4各一个.

8.2.2. $p_1 p_2 \cdots p_k = 5, p=3$

将 $p_1 p_2 \cdots p_k = 5, p=3$ 代入(7)式得: $15n_1+2, 15n_1+7, 15n_1+12$, 共3个集合且都是除5余2.

将 $p_1 p_2 \cdots p_k = 5, p=3$ 代入(8)式得: $15n_1+1, 15n_1+6, 15n_1+11$, 共3个集合且都是除5余1各一个.

由8.2.1, 8.2.2所述合计得 $5+5+3+3=16$ 个子集.

再将16个子集按除5余0,1,2,3,4分类如下:

除5余0的占2个;

除5余1的占5个;

除5余2的占5个;

除5余3的占2个;

除5余4的占2个;

合计在(7),(8)中得到 $2+5+5+2+2=16$ 个 n_1 系数都是15的an+b型奇合数类集合.

其中最重要的结果是:除5余0、3、4的an+b型奇合数类集合各有仅2个.

第3步,分析KUL中最多可组成几组由 n_1 的系数为15的an+b型奇合数类子集组成的除5余0,1,2,3,4的完全剩余系.

∴由第2步得,最重要的结果是:在(7)、(8)中 n_1 系数都是15且除5余0、3、4的an+b型奇合数类集合各有仅2个.

∴在(7)、(8)中最多两组由 n_1 系数都是15的an+b型奇合数类子集组成的除5余0、1、2、3、4的完全剩余系.

又∴由预备命题可知,KUL的an+b型奇合数类子集通解有且仅有(7),(8).

∴在KUL中最多组成两组 n_1 系数都是15且除5余0、1、2、3、4的完全剩余系.

∴在 $3n, 3n+1, 3n+2$ 中最多有2个是KUL的子集.

由命题2可知,不是KUL的正整数集合,必然是含孪生素数根集合.

由此推出当 $n \geq 1$ 取自然数时,在 $3n, 3n+1, 3n+2$ 中有1个是含有孪生素数的根集合.

例如:当 $n=1$ 时,则 $Q=3n+2=3 \times 1+2=5$,将 $Q=5$ 代入(2)式得:11, 13.

因为11,13是孪生素数组,则5是孪生素数的根,即当 $n \geq 1$ 取正整数时, $3n+2$ 集合是含有素数根的集合.所以当 $n \geq 1$ 取正整数时,在 $3n, 3n+1, 3n+2$ 三个集合中,至少有1个集合是含有素数的根的集合.

∴当 $p=3$ 时,命题8成立.

8.3. $p=5$

第1步:分析 $5n, 5n+1, 5n+2, 5n+3, 5n+4$ 分别以3为模的结果.

将 $5n, 5n+1, 5n+2, 5n+3, 5n+4$ 分别以3为模,由完全剩余系理论可得5组除3余0,1,2的完全剩余系,即:

$$\{5n \mid n \in N^+\} = \{15n_1 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{15n_1+5 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{15n_1+10 \mid n_1 \in N^+\}$$

$$\{5n+1 \mid n \in N^+\} = \{15n_1+1 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{15n_1+6 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{15n_1+11 \mid n_1 \in N^+\}$$

$$\{5n+2 \mid n \in N^+\} = \{15n_1+2 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{15n_1+7 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{15n_1+12 \mid n_1 \in N^+\}$$

$$\{5n+3 \mid n \in N^+\} = \{15n_1+3 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{15n_1+8 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{15n_1+13 \mid n_1 \in N^+\}$$

$$\{5n+4 \mid n \in N^+\} = \{15n_1+4 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{15n_1+9 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{15n_1+14 \mid n_1 \in N^+\}$$

合计共得到15个 n_1 系数都是15的an+b型奇合数类集合,组成了5组除3余0,1,2的完全剩余系,其特点是[22]:

除3余0占5个;

除3余1占5个;

除3余2占5个;

合计共得到 $5+5+5=15$ 个 n_1 系数都是15的an+b型奇合数类集合.

第2步, 从 (7), (8) 中寻找所有 n_1 的系数是15的 $an+b$ 型奇合数类的集合

∴显然由 (7), (8) 可知, 当 n_1 的系数是15时, 有且仅有 $p_1 p_2 \cdots p_k = 3, p=5$ 和 $p_1 p_2 \cdots p_k = 5, p=3$ 情形:

8.3.1. $p_1 p_2 \cdots p_k = 3, p=5$

将 $p_1 p_2 \cdots p_k = 3, p=5$ 代入 (7) 式得: $15 n_1 + 1, 15 n_1 + 4, 15 n_1 + 7, 15 n_1 + 10, 15 n_1 + 13$ 共5个集合且都是除3余1.

将 $p_1 p_2 \cdots p_k = 3, p=5$ 代入 (8) 式得: $15 n_1, 15 n_1 + 3, 15 n_1 + 6, 15 n_1 + 9, 15 n_1 + 12$ 共5个集合且都是除3余0.

8.3.2. $p_1 p_2 \cdots p_k = 5, p=3$

将 $p_1 p_2 \cdots p_k = 5, p=3$ 代入 (7) 式得: $15 n_1 + 2, 15 n_1 + 7, 15 n_1 + 12$, 共3个集合且除3余0,1,2各一个.

将 $p_1 p_2 \cdots p_k = 5, p=3$ 代入 (8) 式得: $15 n_1 + 1, 15 n_1 + 6, 15 n_1 + 11$, 共3个集合且除3余0, 1,2各一个.

由8.3.1, 8.3.2所述合计得 $5+5+3+3=16$ 个子集.

再将16个子集按除3余0, 1, 2分类如下:

除3余0的占7个;

除3余1的占7个;

除3余2的占2个;

合计16个集合.

合计在 (7)、(8) 中得到 $7+7+2=16$ 个 n_1 系数都是15的 $an+b$ 型奇合数类集合.

其中最重要的结果是: 除3余2的 $an+b$ 型奇合数类集合有仅有2个.

第3步, 分析 $K \cup L$ 中最多可组成几组由 n_1 的系数为15的 $an+b$ 型奇合数类子集组成的除3余0,1,2的完全剩余系.

∴由第2步得, 最重要的结果是: 在 (7)、(8) 中 n_1 系数都是15且除3余2的 $an+b$ 型奇合数类集合有仅有2个.

∴在 (7)、(8) 中最多组成两组 n_1 系数都是15且除3余0、1、2的完全剩余系.

又∴由预备命题可知, $K \cup L$ 的 $an+b$ 型奇合数类子集通解有且仅有 (7), (8).

∴在 $K \cup L$ 中最多组成两组 n_1 系数都是15且除3余0、1、2的完全剩余系.

由此推出当 $n \geq 1$ 取自然数时, $5n, 5n+1, 5n+2, 5n+3, 5n+4$ 中最多有2个集合是 $K \cup L$ 的子集.

则: $5n, 5n+1, 5n+2, 5n+3, 5n+4$ 中有3个集合不是 $K \cup L$ 的子集.

由命题2可知, 不是 $K \cup L$ 的正整数集合, 必然含孪生素数根.

由此推出当 $n \geq 1$ 取自然数时, $5n, 5n+1, 5n+2, 5n+3, 5n+4$ 有3个集合是含有孪生素数根的集合.

如 1). 当 $n=1$ 时, $5n+3=8$, 将 $Q=8$ 代入 (2) 得: 17, 19;

如 2). 当 $n=2$ 时, $5n+4=14$, 将 $Q=14$ 代入 (2) 得: 29, 31;

如 3). 当 $n=1$ 时, $5n=5$, 将 $Q=5$ 代入 (2) 得: 11, 13; 因为17, 19; 29, 31; 11, 13都是孪生素数, 则8, 14, 5都是孪生素数根, 所以当 $n \geq 1$ 取正整数时, 在 $5n, 5n+1, 5n+2, 5n+3, 5n+4$ 五个集合中: 有 3个集合是含有孪生素数根的集合.

∴当 $p=5$ 时, 命题8成立.

8.4. $p \geq 7$ 取素数

显然 $pn, pn+1, pn+2, \dots, pn+p-1$ 的 p 个集合有几个是 $K \cup L$ 的集合, 与 $pn, pn+1, pn+2, \dots, pn+p-1$ 分别以 m 为模的 m 大小无关 (显然 m 越大对应的完全剩余系子集越多, 反之越少, 所以 m 越小越简单), 但 $m \neq p$ 取奇素数.

因为 $p \geq 7$ 取素数, 所以取 $m=3$ 最简单.

第1步: 分析 $pn, pn+1, pn+2, \dots, pn+p-1$ 的 p 个集合, 分别以3为模的结果.

将 $pn, pn+1, pn+2, \dots, pn+p-1$ 的 p 个集合, 分别以3为模, 由完全剩余理论可知, 可得 p 组除3余0, 1, 2完全剩余系. 即

$$\{pn \mid n \in N^+\} = \{3p n_1 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{3p n_1 + p \mid n_1 \in N^+\} \cup \{3p n_1 + 2p \mid n_1 \in N^+\},$$

$$\{pn+1 \mid n \in N^+\} = \{3p n_1 + 1 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{3p n_1 + p + 1 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{3p n_1 + 2p + 1 \mid n_1 \in N^+\},$$

$$\{pn+2 \mid n \in N^+\} = \{3p n_1 + 2 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{3p n_1 + p + 2 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{3p n_1 + 2p + 2 \mid n_1 \in N^+\},$$

...

$$\{pn+p-1 \mid n \in N^+\} = \{3p n_1 + p - 1 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{3p n_1 + 2p - 1 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{3p n_1 + 3p - 1 \mid n_1 \in N^+\}.$$

共得到 $3p$ 个 n_1 的系数都是 $3p$ 的 $an+b$ 型奇合数类的集合.

其中重要结果是:

除3余0的占 p 个;

除3余1的占 p 个;

除3余2的占 p 个;

合计 $3p$ 个.

第2步, 从 (7), (8) 中寻找所有 n_1 的系数是 $3p$ 的 $an+b$ 型奇合数类的集合.

显然由 (7), (8) 可知, 当 n_1 的系数是 $3p$ 时, 有且仅有 $p_1 p_2 \cdots p_k = 3, p=3$ 情形:

8.4.1. $p_1 p_2 \cdots p_k = 3$

将 $p_1 p_2 \cdots p_k = 3$ 代入 (7) 式得: $3p n_1 + 1, 3p n_1 + 4, 3p n_1 + 7, \dots, 3p n_1 + 3(p-1) + 1$ 共 p 个, 且都是除3余1.

将 $p_1 p_2 \cdots p_k = 3$ 代入 (8) 式得: $3p n_1, 3p n_1 + 3, 3p n_1 + 6, \dots, 3p n_1 + 3(p-1)$ 共 p 个, 且都是除3余0.

8.4.2. $p=3$

将 $p=3$ 代入 (7) 式得:

$$3 p_1 p_2 \cdots p_k n_1 + \frac{p_1 p_2 \cdots p_k - 1}{2}, 3 p_1 p_2 \cdots p_k n_1 + p_1 p_2 \cdots p_k + \frac{p_1 p_2 \cdots p_k - 1}{2}, 3 p_1 p_2 \cdots p_k n_1 + 2 p_1 p_2 \cdots p_k + \frac{p_1 p_2 \cdots p_k - 1}{2}$$

显然当 $p_1 p_2 \cdots p_k = p$ 时, n_1 的系数是 $3p$, 将

$$p_1 p_2 \cdots p_k = p \text{ 代入 } 3 p_1 p_2 \cdots p_k n_1 + \frac{p_1 p_2 \cdots p_k - 1}{2}, 3 p_1 p_2 \cdots p_k n_1 + p_1 p_2 \cdots p_k + \frac{p_1 p_2 \cdots p_k - 1}{2}, 3 p_1 p_2 \cdots p_k n_1 + 2 p_1 p_2 \cdots p_k + \frac{p_1 p_2 \cdots p_k - 1}{2}$$

$$\text{得: } 3p n_1 + \frac{p-1}{2}, 3p n_1 + p + \frac{p-1}{2}, 3p n_1 + 2p + \frac{p-1}{2}$$

$$\therefore \{3p n_1 + \frac{p-1}{2} \mid n_1 \in N^+\} \cup \{3p n_1 + p + \frac{p-1}{2} \mid n_1 \in N^+\} \cup \{3p n_1 + 2p + \frac{p-1}{2} \mid n_1 \in N^+\} = \{pn + \frac{p-1}{2} \mid n \in N^+\}$$

$$\text{即 } 3p n_1 + \frac{p-1}{2}, 3p n_1 + p + \frac{p-1}{2}, 3p n_1 + 2p + \frac{p-1}{2}, \text{ 是 } pn + \frac{p-1}{2} \text{ 的全体正整数以 } 3 \text{ 为模, 分解的完全剩余系子集, 则除 } 3 \text{ 余 } 0, 1, 2 \text{ 各一个.}$$

$$\therefore \text{在 } 3p n_1 + \frac{p-1}{2}, 3p n_1 + p + \frac{p-1}{2}, 3p n_1 + 2p + \frac{p-1}{2} \text{ 中: 除 } 3 \text{ 余 } 0 \text{ 占一个; 除 } 3 \text{ 余 } 1 \text{ 占一个; 除 } 3 \text{ 余 } 2 \text{ 占一个, 共计 } 3 \text{ 个.}$$

$$\text{将 } p=3 \text{ 代入 (8) 式得: } 3 p_1 p_2 \cdots p_k n_1 + \frac{p_1 p_2 \cdots p_k - 1}{2} - 1, 3 p_1 p_2 \cdots p_k n_1 + p_1 p_2 \cdots p_k + \frac{p_1 p_2 \cdots p_k - 1}{2} - 1, 3 p_1 p_2 \cdots p_k n_1 + 2 p_1 p_2 \cdots p_k + \frac{p_1 p_2 \cdots p_k - 1}{2} - 1.$$

$$\text{显然当 } p_1 p_2 \cdots p_k = p \text{ 时, } n_1 \text{ 的系数是 } 3p, \text{ 将 } p_1 p_2 \cdots p_k = p \text{ 代入 } 3 p_1 p_2 \cdots p_k n_1 + \frac{p_1 p_2 \cdots p_k - 1}{2} - 1, 3 p_1 p_2 \cdots p_k n_1 + p_1 p_2 \cdots p_k + \frac{p_1 p_2 \cdots p_k - 1}{2} - 1, 3 p_1 p_2 \cdots p_k n_1 + 2 p_1 p_2 \cdots p_k + \frac{p_1 p_2 \cdots p_k - 1}{2} - 1 \text{ 得: } 3p n_1 + \frac{p-1}{2} - 1, 3p n_1 + p + \frac{p-1}{2} - 1, 3p n_1 + 2p + \frac{p-1}{2} - 1.$$

$$\therefore \{3p n_1 + \frac{p-1}{2} - 1 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{3p n_1 + p + \frac{p-1}{2} - 1 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{3p n_1 + 2p + \frac{p-1}{2} - 1 \mid n_1 \in N^+\} = \{pn + \frac{p-1}{2} - 1 \mid n \in N^+\}.$$

$$\text{即: } 3p n_1 + \frac{p-1}{2} - 1, 3p n_1 + p + \frac{p-1}{2} - 1, 3p n_1 + 2p + \frac{p-1}{2} - 1, \text{ 是 } pn + \frac{p-1}{2} - 1 \text{ 以 } 3 \text{ 为模分解的完全剩余系子集, 则除 } 3 \text{ 余 } 0, 1, 2 \text{ 各一个.}$$

$$\therefore \text{在 } 3p n_1 + \frac{p-1}{2} - 1, 3p n_1 + p + \frac{p-1}{2} - 1, 3p n_1 + 2p + \frac{p-1}{2} - 1 \text{ 中: 除 } 3 \text{ 余 } 0 \text{ 占一个; 除 } 3 \text{ 余 } 1 \text{ 占一个; 除 } 3 \text{ 余 } 2 \text{ 占一个, 共计 } 3 \text{ 个.}$$

$$\text{将 } p=3 \text{ 代入 (8) 式得: } 3 p_1 p_2 \cdots p_k n_1 + \frac{p_1 p_2 \cdots p_k - 1}{2} - 1, 3 p_1 p_2 \cdots p_k n_1 + p_1 p_2 \cdots p_k + \frac{p_1 p_2 \cdots p_k - 1}{2} - 1, 3 p_1 p_2 \cdots p_k n_1 + 2 p_1 p_2 \cdots p_k + \frac{p_1 p_2 \cdots p_k - 1}{2} - 1.$$

$$\text{显然当 } p_1 p_2 \cdots p_k = p \text{ 时, } n_1 \text{ 的系数是 } 3p, \text{ 将 } p_1 p_2 \cdots p_k = p \text{ 代入 } 3 p_1 p_2 \cdots p_k n_1 + \frac{p_1 p_2 \cdots p_k - 1}{2} - 1, 3 p_1 p_2 \cdots p_k n_1 + p_1 p_2 \cdots p_k + \frac{p_1 p_2 \cdots p_k - 1}{2} - 1, 3 p_1 p_2 \cdots p_k n_1 + 2 p_1 p_2 \cdots p_k + \frac{p_1 p_2 \cdots p_k - 1}{2} - 1 \text{ 得: } 3p n_1 + \frac{p-1}{2} - 1, 3p n_1 + p + \frac{p-1}{2} - 1, 3p n_1 + 2p + \frac{p-1}{2} - 1.$$

$$\therefore \{3p n_1 + \frac{p-1}{2} - 1 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{3p n_1 + p + \frac{p-1}{2} - 1 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{3p n_1 + 2p + \frac{p-1}{2} - 1 \mid n_1 \in N^+\} = \{pn + \frac{p-1}{2} - 1 \mid n \in N^+\}.$$

$$\text{即: } 3p n_1 + \frac{p-1}{2} - 1, 3p n_1 + p + \frac{p-1}{2} - 1, 3p n_1 + 2p + \frac{p-1}{2} - 1, \text{ 是 } pn + \frac{p-1}{2} - 1 \text{ 以 } 3 \text{ 为模分解的完全剩余系子集, 则除 } 3 \text{ 余 } 0, 1, 2 \text{ 各一个.}$$

$$\therefore \text{在 } 3p n_1 + \frac{p-1}{2} - 1, 3p n_1 + p + \frac{p-1}{2} - 1, 3p n_1 + 2p + \frac{p-1}{2} - 1 \text{ 中: 除 } 3 \text{ 余 } 0 \text{ 占一个; 除 } 3 \text{ 余 } 1 \text{ 占一个; 除 } 3 \text{ 余 } 2 \text{ 占一个, 共计 } 3 \text{ 个.}$$

$$\text{由 } 8.4.1, 8.4.2 \text{ 所述合计得 } p+p+3+3=2p+6 \text{ 个子集. 再将 } 2p+6 \text{ 个子集按除 } 3 \text{ 余 } 0, 1, 2 \text{ 分类如下: 除 } 3 \text{ 余 } 0 \text{ 的占 } p+2 \text{ 个; 除 } 3 \text{ 余 } 1 \text{ 的占 } p+2 \text{ 个; 除 } 3 \text{ 余 } 2 \text{ 的占 } 2 \text{ 个; 合计 } 2p+6 \text{ 个, 其中最重要的是除 } 3 \text{ 余 } 2 \text{ 有仅有两个.}$$

$$\text{第 } 3 \text{ 步, 分析 } K \cup L \text{ 中最多可组成几组由 } n_1 \text{ 的系数为 } 3p \text{ 的 } an+b \text{ 型奇合数类子集组成的除 } 3 \text{ 余 } 0, 1, 2 \text{ 的完全剩余系.}$$

$$\therefore \text{由第 } 2 \text{ 步得, 在 (7)、(8) 中 } n_1 \text{ 系数是 } 3p \text{ 的 } an+b \text{ 型奇合数类集合共有 } 2p+6 \text{ 个, 其中, 除 } 3 \text{ 余 } 0 \text{ 的占 } p+2 \text{ 个; 除 } 3 \text{ 余 } 1 \text{ 的占 } p+2 \text{ 个; 除 } 3 \text{ 余 } 2 \text{ 的占 } 2 \text{ 个 (最重要);}$$

$$\therefore \text{在 } 2p+6 \text{ 个集合中最多可组成两组除 } 3 \text{ 余 } 0, 1, 2 \text{ 的完全剩余系.}$$

$$\therefore \text{在 (7)、(8) 中最多组成两组 } n_1 \text{ 系数都是 } 3p \text{ 且除 } 3 \text{ 余 } 0, 1, 2 \text{ 的完全剩余系.}$$

$$\text{又: 由预备命题可知, } K \cup L \text{ 的 } an+b \text{ 型奇合数类子集通解有且仅有 (7)、(8).}$$

$$\therefore \text{在 } K \cup L \text{ 中最多组成两组 } n_1 \text{ 系数都是 } 3p \text{ 且除 } 3 \text{ 余 } 0, 1, 2 \text{ 的完全剩余系.}$$

$$\text{由此推出当 } n \geq 1 \text{ 取自然数时, } pn, pn+1, pn+2, \dots, pn+p-1 \text{ 的 } p \text{ 个集合中最多有 } 2 \text{ 个集合是 } K \cup L \text{ 的子集.}$$

$$\text{则: 在 } pn, pn+1, pn+2, \dots, pn+p-1 \text{ 的 } p \text{ 个集合中, 有 } p-2 \text{ 个集合不是 } K \cup L \text{ 的子集.}$$

$$\text{由命题 } 2 \text{ 可知, 不是 } K \cup L \text{ 的正整数集合, 必然含孪生素数根.}$$

$$\text{由此推出当 } n \geq 1 \text{ 取自然数时, 在 } pn, pn+1, pn+2, \dots, pn+p-1 \text{ 的 } p \text{ 个集合中, 有 } p-2 \text{ 个集合是含有孪生素数根的集合.}$$

$$\therefore \text{命题 } 8 \text{ 成立}$$

$$\text{又: 前面已证明命题 } 8 \text{ 与孪生素数有无穷多命题等价.}$$

$$\therefore \text{孪生素数有无穷多, 孪生素数猜想成立.}$$

9. 结语

本文用辛达拉姆 (Sndaram) 筛法找出了一种有别于用爱氏筛法 (Eratosthenes) [23] 求素数、孪生素数、三生素数的方法, 发现了数阵 $2xy+x+y$ 的 $an+b$ 型子集通解, 从三种证明 $3n+2$ 不是 $K \cup L$ 的子集方法中, 发现了证明孪生素数无穷多的方法, 并给出了详细的证明、证明了孪生素数猜想成立.

参考文献

- [1] 李维超. 辛达拉姆筛法的推广[J]. 数学通报, 2001, (3):38—39。
- [2] 李复中. 初等数论选讲[M]. 吉林: 东北师范大学出版社, 1984: 85。
- [3] 华罗庚. 数论导引[M]. 北京: 科学出版社, 1979。
- [4] 闫奎迎. 勾股数组的排列顺序及应用[A]. 中国初等数学研究文集(二)[C]. 香港: 中国科学文化出版社, 2003:135—138。
- [5] 王文娜, 闫亮, 闫魁迎. 用辛达拉姆筛法探讨孪生素数无穷多[J]. 许昌学院学报, 2014,33 (2) :31—36。
- [6] 王元. 谈谈素数{M}. 上海: 上海教育出版社, 1978.2-10。
- [7] [美]G.波利亚. 数学与猜想[M]. 北京: 科学出版社, 2001: 64-70。
- [8] 潘承洞, 潘承彪. 哥德巴赫猜想[M]. 北京 科学出版社, 2001。
- [9] 吴在渊. 数论初步[M]. 北京 商务印书馆, 1931。
- [10] 闵嗣鹤, 严士键. 初等数论[M]. 北京: 高等出版社, 1958。
- [11] 柯召, 孙琦. 谈谈不定方程[M]. 上海: 上海教育出版社, 1960。
- [12] 闫奎迎, 王文娜. 关于奇合数和奇素数一般解的探讨[J]. 许昌师专学报, 1996, 15 (4) :49—50。
- [13] 闫奎迎, 王文娜. 关于孪生素数无穷多问题的探讨[J]. 许昌师专学报, 1998, 17 (1) :6—10。
- [14] 闫奎迎, 王文娜. 关于孪生素数猜想证明的探讨[J]. 许昌师专学报, 2000, 19 (2) :15—21。
- [15] 闫奎迎. 勾股数组的排列顺序[J]. 河南教育学院学报: 教育教学研究专辑, 1996: 7—11。
- [16] 闫奎迎. 猜想. 信阳师范学院学报[J]. 1997, 10(3):8。
- [17] 闫奎迎. 关于费尔马定理证明的探讨 [J]. 许昌师专学报, 1991.10 (2) :26—37。
- [18] U. Dudley, ELEMENTARY NUMBER THEORY (W. H. Freeman and Co. 1969) (有中译本《基础数学》, 周仲良译, 上海科学技术出版社)。
- [19] R. P. Burn. A Pathway into Number theory. (Cambridge University Press 1982).
- [20] Hasse. H. Zahlentheorie (Berlin Akademie-Verlag, 1949).
- [21] Hasse, H. Vorlesungen uber Zahlentheorie (Berlin, Springer, 1950).
- [22] 吴在渊, 数论初步 (商务印书馆, 1931)。
- [23] 陈景润. 初等数论[M]. 北京: 科学出版社, 1978.3-20。

作者简介



闫魁迎 (1957—), 男, 河南临汝市人, 经济师, 大专. 先后在许昌学院学报、河南教育学院学报、信阳师范学院学报、中国初等数学研究文集等期刊发表数学文章10篇. 发表的“关于孪生素数无穷多问题的探讨”, 99年获得河南省第六届自然科学优秀论文叁等奖, 发表的“勾股数组的排列顺序”, 在2001年全国“紫金杯”数学创新教育优秀论文评选交流活动中荣获贰等奖。