



# Using the Law of Rotational Inertia to Explain the Gyro Precession Mechanism and Its Stability

Huang Shaoshu<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Academic Center, No. 23 Middle School, Liupanshui City, Liupanshui, China

<sup>2</sup>School of Mathematics and Physics, Anshun College, Anshun, China

## Email address:

597015954@qq.com

## To cite this article:

Huang Shaoshu. Using the Law of Rotational Inertia to Explain the Gyro Precession Mechanism and Its Stability. *Asia-Pacific Journal of Physics*. Vol. 2, No. 1, 2020, pp. 1-8.

**Received:** December 4, 2019; **Accepted:** March 23, 2020; **Published:** April 23, 2020

**Abstract:** The mechanism of gyro precession and its stability is an unresolved research question. It has long been widely believed that gyro precession is the result of heavy moments. But this does not completely agree with the experimental facts. This paper introduces the experimental phenomenon of gyro precession on the horizontal plane, proposes the law of rotational inertia and the law of microdeformation, and gives an empirical expression of the law of microdeformation. Combined with the principle of imaginary axis rotation balance and the law of conservation of momentum moment, the experimental phenomena of gyro precession are analyzed. The determination formulas of the gyro precession angular velocity and the rotation angular velocity and the relationship between them are given, and the conditions for whether the gyro precession can be restored to a stable rotation state under certain conditions are given. Gyro precession mechanism and its stability.

**Keywords:** Law of Rotational Inertia, Gyro Precession, Law of Micro-Deformation Action, Principle of Rotational Balance of Imaginary Axis, Gyro Effect

## 用转动惯性定律等诠释陀螺进动机理及其稳定性

黄绍书<sup>1, 2</sup>

<sup>1</sup>六盘水市第23中学学术中心, 六盘水, 中国

<sup>2</sup>安顺学院数理学院, 安顺, 中国

## 邮箱

597015954@qq.com

**摘要:** 陀螺进动机理及其稳定性是一个悬而未决的研究问题。长期以来的普遍观点认为, 陀螺进动是重力矩作用的结果。但这与实验事实不完全相吻合。本文介绍水平面上陀螺进动的实验现象, 提出转动惯性定律和微形变作用定律, 给出微形变作用定律经验表达式。并结合虚定轴转动平衡原理及动量矩守恒定律对陀螺进动的实验现象予以剖析。给出了陀螺进动角速度和自转角速度的决定式以及它们之间的关系式, 还给出了在一定条件下陀螺进动过程中能否恢复稳定自转状态的条件, 较全面的诠释了水平面上陀螺的进动机理及其稳定性。

**关键词:** 转动惯性定律, 陀螺进动, 微形变作用定律, 虚定轴转动平衡原理, 陀螺效应

## 1. 引言

长期以来的普遍观点认为，陀螺进动是重力矩作用的结果。这一论断实际上是很牵强的，与实验事实不吻合。对陀螺进动的动力学分析中，都仅考虑重力作用[1, 2]，不能释疑陀螺进动实验呈现出来的陀螺进动过程中为何不会倾倒等现象，更不能全面诠释陀螺的进动机理。

陀螺的稳定性问题一直以来也都存在争议。也就是说，高速旋转（自转）的陀螺，受到扰动后通常会发生进动，陀螺进动过程中能不能恢复到原来的纯自转状态以及恢复纯自转状态需要怎样的条件等问题似乎没有共识。

另外，关于陀螺进动与自转的方向问题，同样存在一定的分歧。多数观点认为进动角速度与自转角速度的方向一致，但也还是有少数观点认为进动角速度与自转角速度的方向相反。因此，也没有统一的定论，显得有些含糊和混乱。

## 2. 三个引理

本文的有关推理过程中，除了必须要用到熟知的动量矩守恒定律外，还必须要用到过去尚未被发现或提出的转动惯性定律和微形变作用定律，以及虽已被发现但仍尚未推广的虚定轴转动平衡原理。为了便于清晰的说理和表述问题，现先以引理的形式给出这三条规律。

### 2.1. 引理1：转动惯性定律

水平面上竖直方向高速旋转的陀螺，水平面越光滑，其维持转动的时间就越长；转动惯量越大的陀螺，越不容易改变它的转动状态。高速转动着的载荷洗衣机脱水桶，若切断电源同时拉起顶盖，脱水桶很快就会停止；若切断电源但是不拉起顶盖，脱水桶将会经过较长时间才能停止；相同条件下，载荷脱水桶比空载脱水桶停止转动所需时间要长。

实践表明：任何转动的物体都总保持原来的匀速转动状态，直到有外力矩迫使它改变这种状态。

这里将这条规律称为转动惯性定律，同时把物体保持原来转动状态的这种性质称为转动惯性。物体的转动惯性由它的转动惯量决定，转动惯量越大，其转动惯性就越大。

说明一下：这里的转动包括纯自转和自转与进动共存的两种状况，匀速转动是指转动过程中角速度不变的转动。

### 2.2. 引理2：微形变作用定律

硬度较大的两个相互接触并发生挤压的物体（准刚体）接触面发生的形变是很微小的，称之为微形变。由于微形变的存在，使得两物体在挤压情况下它们之间的真实接触面将偏移零压力时状况。

这里将微形变过程中产生的相互作用力称为微形变作用力。这里规定：微形变作用力包括微形变过程中产生的弹力和摩擦力，其遵循的规律是比较复杂的。

根据实践经验可知，微形变作用力将随微形变量和自转角速度的增大而增大，而随进动章角的增大而减小。这里为了便于简化说理而作近似表述：微形变作用力  $F$  跟

微形变量  $x$  的单调递增函数  $f_{(x)}$  单调递增，跟自转角速度  $\omega_{(\theta)}$  的单调递增函数  $\chi_{(\omega_{(\theta)})}$  单调递增，跟进动章角  $\theta$  的单调递减函数  $\psi_{(\theta)}$  单调递增。满足

$$F = k (f_{(x)} + \chi_{(\omega_{(\theta)})} + \psi_{(\theta)}) , \quad (k \geq 1) \quad (1)$$

这里把这一规律称为微形变作用定律。其中， $f_{(x)}$ 、 $\chi_{(\omega_{(\theta)})}$ 、 $\psi_{(\theta)}$  都具有力的量纲； $k$  是与物体的刚性和接触面的光滑度有关的无量纲的常量，称为微形变因数。若两物体之间的接触面绝对光滑且绝对刚性，则  $k = 1$ 。

### 2.3. 引理3：虚定轴转动平衡原理

这里直接引用文献[3]给出的虚定轴转动平衡原理：绕虚定轴转动的刚体，在稳定转动的状态下，所受到的各非切向力对转动顶点的力矩矢量和为零。即

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \cdots + \vec{M}_n = 0, \text{ 亦即 } \sum \vec{M} = 0 \quad (2)$$

文献[3]认为，刚体的定轴转动可以分为实定轴转动和虚定轴转动两大类型。其中，实定轴转动是指固定轴对转动的刚体有作用力的类型，比如：门绕门轴转动、偏心轮转动等就属于这一类型；虚定轴转动是指固定轴对转动刚体没有作用力的类型，比如：飞车走壁、陀螺旋转以及自行车稳定性[4,5]等就属于这一类型。

绕虚定轴转动的刚体遵循虚定轴转动平衡原理，在转动过程中刚体扫过的曲面（简称转动面）往往是一个圆锥面，圆锥面的顶点即为称转动顶点。事实上，转动顶点一定就在刚体绕着转动的虚定轴上。

## 3. 陀螺进动实验

首先说明：本文仅研究水平面上的陀螺转动情况，且有关推证中，如果没有特别指明，都认为水平面是光滑的。

### 3.1. 几个概念的描述

陀螺在一定初始外力矩的驱动下，就会绕着其对称轴高速旋转，常称为自转。高速旋转的陀螺，若所受合外力矩为零，将不会改变转动状态。陀螺高速旋转过程中，若受到某种扰动致使合外力矩不为零，自转轴将会偏离原来转动时的状态同时绕着过某一定点（比如陀螺的尖端）的转动轴做虚定轴旋转，这就是陀螺的进动。陀螺进动过程中，在一定的条件下能够恢复原来的自转状态，这就是陀螺的稳定性。

### 3.2. 实验现象

如图1所示是根据实验现象绘制的水平面上自转和进动的陀螺状态及进动轨迹。在  $A$  点用绳鞭给陀螺一个瞬时外力矩，陀螺在绕其对称轴自转的同时，将自  $A$  点沿弧线进动到  $B$  点，然后在  $B$  做定点进动。从图中（沿转

动方向俯视)可以看出,陀螺进动的角速度方向与其自转的角速度方向总是一致的。

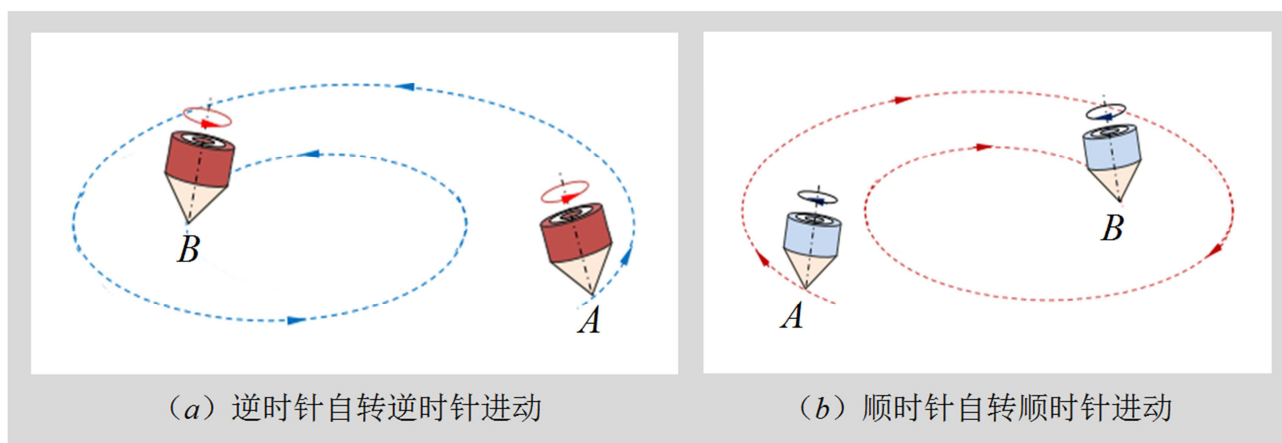


图1 陀螺进动与自转的角速度方向一致。

通过大量实验表明:

(1) 陀螺进动包括(陀螺尖端)弧线或准弧线进动和定点进动两个阶段,而定点进动阶段又通常包括恢复稳定自转和再次进动两个过程。

(2) 陀螺进动的角速度方向总是跟其自转角速度方向一致。也就是说,进动角速度与自转角速度总都为逆时针方向或总都为顺时针方向。

(3) 陀螺进动过程中,其章角(对称轴与竖直方向之间的夹角)或倾角(对称轴与水平面之间的夹角)会发生改变,最大章角跟支撑面的光滑度、平整度及刚性有关。也就是,若光滑度与平整度越好、刚性越强,则最大章角就越小。

(4) 在给定初始能量的约束下,陀螺进动状况的自转角速度总小于且约等于非进动状况的自转角速度。

#### 4. 陀螺进动机理

在无摩擦理想情况下,陀螺稳定进动过程中,其对称轴(即自转轴)将扫过圆锥曲面,如图2所示。一般地,陀螺被绳鞭抽动的初始阶段,其自转角速度是很大的,章角也比较大。这时陀螺尖端将碾压微形变做弧线(理想状况)或准弧线运动,自转轴 $OZ$ 绕竖直轴 $OZ_1$ 进动,如图2(a)所示。由于总存在摩擦作用,自转角速度将逐渐减小,章角也随之减小。当章角减小到一定程度,陀螺尖端不足以碾压微形变的阻碍时,陀螺尖端将定点于 $O_2$ 点( $O_2$ 点与 $O$ 点重合,下同),这时自转轴 $OZ$ 绕竖直轴 $O_2Z_2$ 进动,如图2(b)所示。

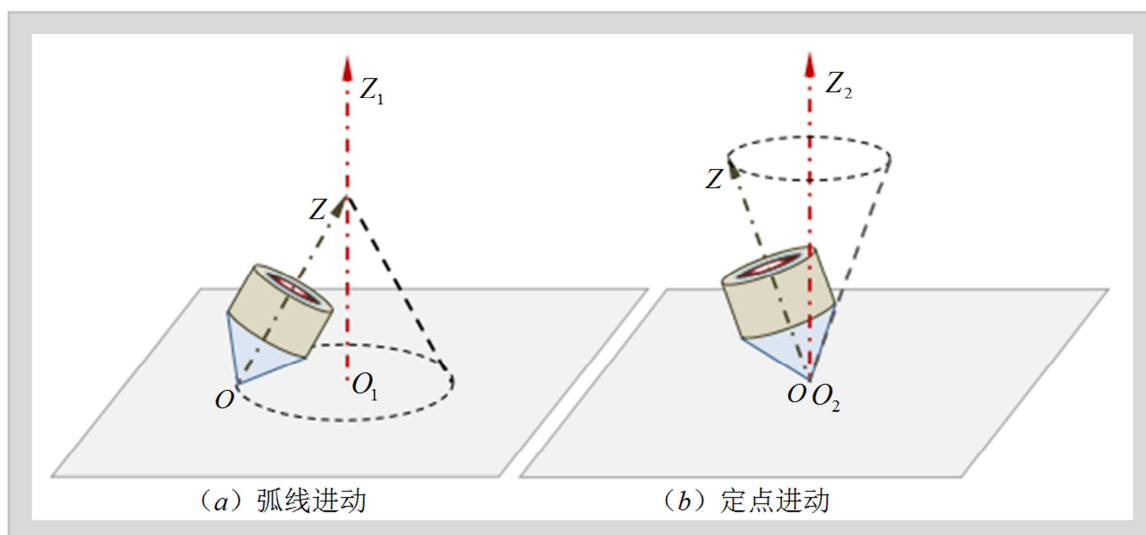


图2 陀螺进动过程中对称轴扫过圆锥面。

根据引理1,不难理解:陀螺进动的过程,实质是其尖端碾压微形变造成的阻碍的过程以及微形变阻止尖端碾压的过程,这一过程的动因源于陀螺的转动惯性。当陀螺逆时针自转过程中,若受到扰动致使自转轴偏离竖直方向时,由于转动惯性,陀螺必定作逆时针进动。同理,顺

时针自转的陀螺受到扰动就必定作顺时针进动。也就是说,转动惯性是陀螺进动的根本原因。同时,陀螺进动过程中,遵循引理2和引理3,且受动量矩守恒定律[6]和机械能守恒定律的调控。

本节主要研究陀螺进动过程中，进动角速度与自转角速度之间的约束关系。

如图3所示，设陀螺绕竖直轴  $OZ$  逆时针自转的角速度为  $\omega$ ，陀螺相对自转轴的转动惯量为  $J_{(0)}$  那么，根据右手螺旋定则可知，陀螺相对自转轴的动量矩的方向沿  $OZ$  轴竖直向上，其大小为  $L_{(\omega)}$ 。

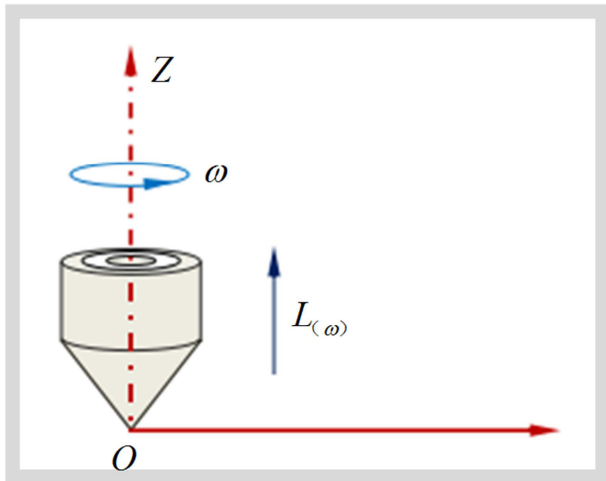


图3 绕竖直轴  $OZ$  自转的陀螺。

那么，竖直方向的总动量矩  $L$  为

$$L = L_{(\omega)} = J_{(0)}\omega \quad (3)$$

陀螺受到扰动自转轴偏离竖直方向时，由于转动惯性将发生进动。事实上，陀螺进动过程中，自转角速度往往是进动章角的某一函数。在给定初始能量的约束下，陀螺进动状况的自转角速度随章角的增大而减小，并总小于且约等于非进动状况的自转角速度。这是由于受机械能守恒的调控，转动过程中机械能不会增加的结果。其具体的能量约束关系比较复杂，限于篇幅，这里不宜展开讨论。

#### 4.1. 弧线进动情形

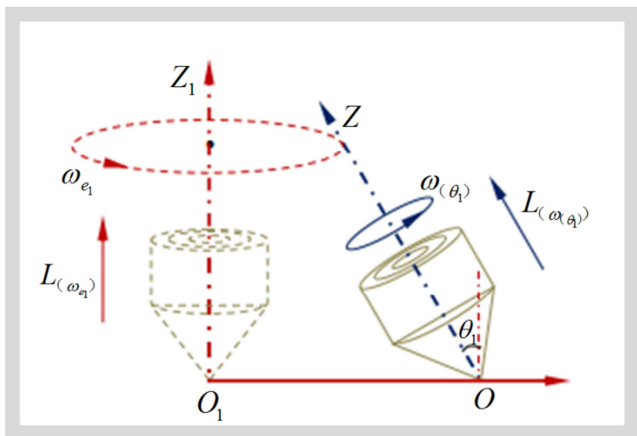


图4 绕竖直轴  $O_1Z_1$  逆时针进动的陀螺。

当自转轴  $OZ$  逆时针以进动角速度  $\omega_{e_1}$  绕竖直轴  $O_1Z_1$  进动时，设章角为  $\theta_1$ （下同），如图4所示。依然根据右手螺旋定则可以判定，重力作用的力矩为水平方向，因此，根据动量矩守恒定律可知，在竖直方向陀螺的动量矩保持不变。所以，陀螺必定以逆时针进动。那么，陀螺相对自转轴的自转动量矩的方向沿  $OZ$  轴倾斜向上，大小可表示为

$$L_{(\omega_{\theta_1})} = J_{(0)}\omega_{(\theta_1)} \quad (4)$$

令这时陀螺相对  $O_1Z_1$  轴进动的转动惯量为  $J_{(\theta_1)}$ （下同），那么陀螺相对  $O_1Z_1$  轴的进动动量矩方向沿  $O_1Z_1$  轴竖直向上，大小为

$$L_{(\omega_{e_1})} = J_{(\theta_1)}\omega_{e_1} \quad (5)$$

由于在竖直方向陀螺的总动量矩  $L$  保持不变，所以由（4）（5）两式，有

$$L = J_{(0)}\omega_{(\theta_1)} \cos \theta_1 + J_{(\theta_1)}\omega_{e_1} \quad (6)$$

由（6）式，可将进动角速度  $\omega_{e_1}$  表示为

$$\omega_{e_1} = \frac{L - J_{(0)}\omega_{(\theta_1)} \cos \theta_1}{J_{(\theta_1)}} \quad (7)$$

从（7）式可知，由于动量矩  $L$  是定值，因此，陀螺的自转角速度  $\omega_{(\theta_1)}$  越大，则进动角速度  $\omega_{e_1}$  就越小。事实上陀螺进动过程中，一定范围内由于摩擦作用而使自转角速度  $\omega_{(\theta_1)}$  逐渐减小时，进动角速度  $\omega_{e_1}$  会逐渐增大。

由（3）（7）式，可将  $\omega_{e_1}$  表示为

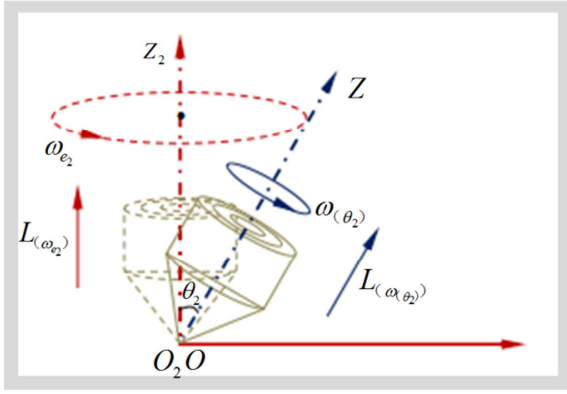
$$\omega_{e_1} = \frac{J_{(0)}\omega - J_{(0)}\omega_{(\theta_1)} \cos \theta_1}{J_{(\theta_1)}} \approx \frac{J_{(0)}\omega (1 - \cos \theta_1)}{J_{(\theta_1)}} \quad (8)$$

显然，当  $\theta = 0^\circ$  时， $\omega_{(\theta_1)} = \omega$ ， $\omega_{e_1} = 0 \text{ rad/s}$ 。通常情况下， $J_{(\theta_1)}$  比  $J_{(0)}$  大得多。故由（8）式可知，进动角速度  $\omega_{e_1}$  比自转角速度  $\omega$  小得多。

说明：在上述各式中， $J_{(\theta_1)}$  是章角  $\theta_1$  的单调递增函数，且与陀螺的形状和质量分布有关。

#### 4.2. 定点进动情形

当自转轴  $OZ$  逆时针以进动角速度  $\omega_{e_2}$  绕竖直轴  $O_2Z_2$  进动时，设章角为  $\theta_2$ （下同），如图5所示。那么，陀螺相对自转轴的自转动量矩的方向沿  $OZ$  轴倾斜向上，大小依然可表示为


 图5 绕竖直线 $O_2Z_2$ 逆时针进动的陀螺。

$$L_{(\omega_{e_2})} = J_{(0)}\omega_{(\theta_2)} \quad (9)$$

令这时陀螺相对 $O_2Z_2$ 轴进动的转动惯量为 $J_{(\theta_2)}$ （下同），那么陀螺相对 $O_2Z_2$ 轴的进动动量矩方向沿 $O_2Z_2$ 轴竖直向上，大小为

$$L_{(\omega_{e_2})} = J_{(\theta_2)}\omega_{e_2} \quad (10)$$

同样，由于在竖直方向陀螺的动量矩 $L$ 保持不变，因此有

$$L = J_{(0)}\omega_{(\theta_2)}\cos\theta_2 + J_{(\theta_2)}\omega_{e_2} \quad (11)$$

由（11）式，可将进动角速度 $\omega_{e_2}$ 表示为

$$\omega_{e_2} = \frac{L - J_{(0)}\omega_{(\theta_2)}\cos\theta_2}{J_{(\theta_2)}} \quad (12)$$

同理，从（12）式可知，由于动量矩 $L$ 是定值，因此，陀螺的自转角速度 $\omega_{(\theta_2)}$ 越大，则进动角速度 $\omega_{e_2}$ 就越小。

根据（3）（12）式，还可得到

$$\omega_{e_2} = \frac{J_{(0)}\omega - J_{(0)}\omega_{(\theta_2)}\cos\theta_2}{J_{(\theta_2)}} \approx \frac{J_{(0)}\omega(1 - \cos\theta_2)}{J_{(\theta_2)}} \quad (13)$$

如前所述，当 $\theta = 0^\circ$ 时， $\omega_{(\theta_2)} = \omega$ ， $\omega_{e_2} = 0 \text{ rad/s}$ 。同样，一般情况下， $J_{(\theta_2)}$ 比 $J_{(0)}$ 大得多，故由（13）式可知，进动角速度 $\omega_{e_2}$ 比自转角速度 $\omega$ 小得多。

说明：在上述各式中， $J_{(\theta_2)}$ 是章角 $\theta_2$ 的单调递增函数，且与陀螺的形状和质量分布有关。

#### 4.3. 历史伪真理

长期以来的普遍观点认为，陀螺进动是重力矩作用的结果。一些文献[1,7]分析陀螺进动成因，都是以逆时针自

转逆时针进动为范本，并附如图6所示[8]或类似的关系图辅助说明。

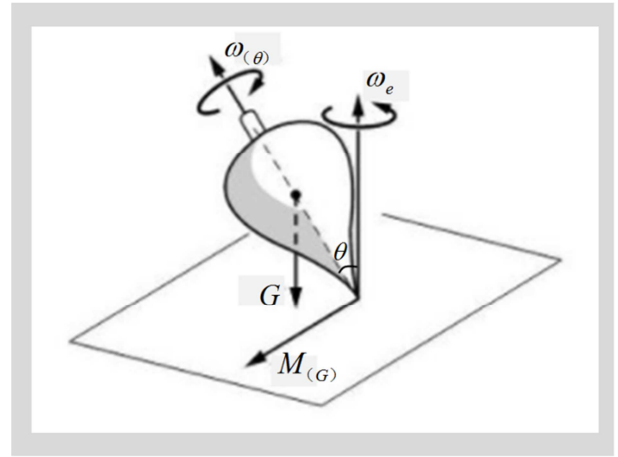


图6 重力矩的作用。

历史分析：当陀螺以角速度 $\omega_{(\theta)}$ 逆时针自转时，其中的重力矩 $M_{(G)}$ 有驱使陀螺逆时针进动的效应。所以，陀螺将以角速度 $\omega_e$ 逆时针进动。

模仿推理：当陀螺以角速度 $\omega_{(\theta)}$ 顺时针自转时，重力矩 $M_{(G)}$ 的大小和方向都跟逆时针自转时完全相同，依然有驱使陀螺逆时针进动的效应。因此，陀螺依然以角速度 $\omega_e$ 逆时针进动。

拚出论断：逆时针自转的陀螺和顺时针自转的陀螺都是逆时针进动的。

显然，这与实际实验事实不相符，属于伪真理。

## 5. 陀螺的稳定性剖析

本节主要分析的是陀螺在进动过程中，能否保持不倾倒和能否恢复纯自转状态的条件，以及进动角速度的决定因素。

### 5.1. 稳定进动的条件

如图7所示是陀螺逆时针自转逆时针进动的情形。设陀螺质量为 $m$ （下同），陀螺微分质量集集中点 $P$ 与尖端 $O$ 点的距离为 $l$ ，陀螺进动过程中受到的重力 $G$ 和微形变作用力 $F_1$ 或 $F_2$ 已在图中标明。



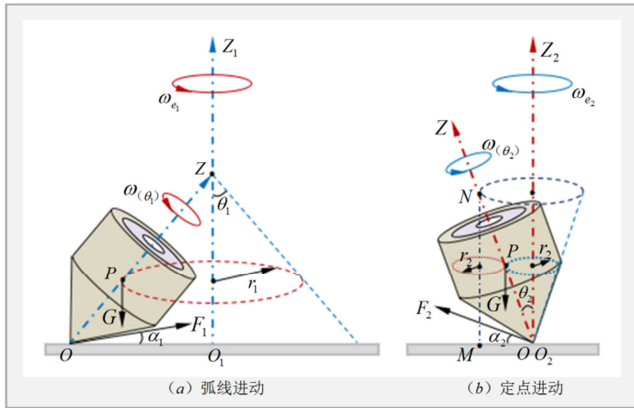


图7 陀螺进动过程中自转轴超过圆锥面。

### 5.1.1. 弧线进动的情形

陀螺做弧线进动的某时刻，自转轴扫过的圆锥面顶点为  $Z$  点。设其章角为  $\theta_1$ ，自转角速度为  $\omega_{(\theta_1)}$ ，其回转半径（微分质量集中点  $P$  到  $O_1Z_1$  轴的距离）为  $r_1$ ，进动角速度为  $\omega_{e_1}$ ，如图7(a)所示。根据图7(a)受力情况及所标明的相关物理量并结合(1)(2)式可知，陀螺绕  $O_1Z_1$  进动过程中，微形变作用力  $F_1$  和重力  $G$  对  $Z$  点的力矩大小分别为

$$M_G = Gr_1 = mgr_1 \quad (14)$$

$$\begin{aligned} M_{F_1} &= F_1 \cos \alpha_1 \cdot \overline{OZ} \cos \theta_1 = k(f_{(x_1)} + \chi_{(\omega_{\theta_1})} + \psi_{(\theta_1)}) \overline{OZ} \cos \alpha_1 \cos \theta_1 \\ &= k(f_{(x_1)} + \chi_{(\omega_{\theta_1})} + \psi_{(\theta_1)}) (l \cos \theta_1 + r_1 \cot \theta_1) \cos \alpha_1 \end{aligned} \quad (15)$$

当陀螺处于稳定进动状态时，根据(2)式，各力矩矢量和等于零，即

$$M_G - M_{F_1} = 0 \quad (16)$$

亦即

$$F_1 = k(f_{(x_1)} + \chi_{(\omega_{\theta_1})} + \psi_{(\theta_1)}) = \frac{mgr_1}{(l \cos \theta_1 + r_1 \cot \theta_1) \cos \alpha_1} \quad (17)$$

同时

$$\begin{cases} k(f_{(x_1)} + \chi_{(\omega_{\theta_1})} + \psi_{(\theta_1)}) \sin \alpha_1 - mg = 0 \\ k(f_{(x_1)} + \chi_{(\omega_{\theta_1})} + \psi_{(\theta_1)}) \cos \alpha_1 - \sqrt{mJ_{(\theta_1)}} \cdot \omega_{e_1}^2 = 0 \end{cases} \quad (18)$$

由(18)式，进动角速度可表示为

$$\omega_{e_1} = \sqrt{\frac{k(f_{(x_1)} + \chi_{(\omega_{\theta_1})} + \psi_{(\theta_1)}) \cos \alpha_1}{\sqrt{mJ_{(\theta_1)}}}} \quad (19)$$

### 5.1.2. 定点进动的情形

陀螺做定点进动的某时刻，设其章角为  $\theta_2$ ，自转角速度  $\omega_{(\theta_2)}$ ，其回转半径（微分质量集中点  $P$  到  $O_2Z_2$  轴

的距离）为  $r_2$ ，进动角速度设为  $\omega_{e_2}$ ，如图7(b)所示。根据图7(b)受力情况及所标明的相关物理量并结合(1)(2)式可知，陀螺绕  $O_2Z_2$  进动过程中，微形变作用力  $F_2$  和重力  $G$  对  $N$  点（ $O_2$  点的共轭点， $MN$  是  $O_2Z_2$  的共轭轴）的力矩大小分别为

$$M_G = Gr_2 = mgr_2 \quad (20)$$

$$\begin{aligned} M_{F_2} &= \\ F_2 \cos \alpha_2 \cdot \overline{ON} \cos \theta_2 &= \\ k(f_{(x_2)} + \chi_{(\omega_{\theta_2})} + \psi_{(\theta_2)}) \overline{ON} \cos \alpha_2 \cos \theta_2 &= \\ k(f_{(x_2)} + \chi_{(\omega_{\theta_2})} + \psi_{(\theta_2)}) (l \cos \theta_2 + r_2 \cot \theta_2) \cos \alpha_2 \end{aligned} \quad (21)$$

如前所述，当陀螺处于稳定进动状态时，根据(2)式，各力矩矢量和等于零，即

$$M_G - M_{F_2} = 0 \quad (22)$$

亦即

$$F_2 = k(f_{(x_2)} + \chi_{(\omega_{\theta_2})} + \psi_{(\theta_2)}) = \frac{mgr_2}{(l \cos \theta_2 + r_2 \cot \theta_2) \cos \alpha_2} \quad (23)$$

同样

$$\begin{cases} k(f_{(x_2)} + \chi_{(\omega_{\theta_2})} + \psi_{(\theta_2)}) \sin \alpha_2 - mg = 0 \\ k(f_{(x_2)} + \chi_{(\omega_{\theta_2})} + \psi_{(\theta_2)}) \cos \alpha_2 - \sqrt{mJ_{(\theta_2)}} \cdot \omega_{e_2}^2 = 0 \end{cases} \quad (24)$$

由 (24) 式, 进动角速度同样可表示为

$$\omega_{e_2} = \sqrt{\frac{k (f_{(x_2)} + \chi_{(\omega_{\theta_2})} + \psi_{(\theta_2)}) \cos \alpha_2}{\sqrt{mJ_{(\theta_2)}}}} \quad (25)$$

## 5.2. 稳定进动的破坏

一般情况下, 陀螺进动过程中的微形变作用力具有瞬变形。因此, 微形变作用力对进动圆锥面顶点的力矩也就会随时变化, 从而影响陀螺的稳定进动。

### 5.2.1. 陀螺效应

根据 (14)、(15) 两式, 当  $M_{F_1} > M_G$ , 即

$$F_1 = k (f_{(x_1)} + \chi_{(\omega_{\theta_1})} + \psi_{(\theta_1)}) > \frac{mgr_1}{(l \cos \theta_1 + r_1 \cot \theta_1) \cos \alpha_1} \quad (26)$$

或根据 (20)、(21) 两式, 当  $M_{F_2} > M_G$ , 即

$$F_2 = k (f_{(x_2)} + \chi_{(\omega_{\theta_2})} + \psi_{(\theta_2)}) > \frac{mgr_2}{(l \cos \theta_2 + r_2 \cot \theta_2) \cos \alpha_2} \quad (27)$$

时, 章角将会逐渐减小, 进动逐渐消失, 陀螺将逐渐恢复稳定自转状态。这就是通常说的陀螺效应。陀螺效应在诸多领域都有着广泛的应用[9-15]。

### 5.2.2. 倾倒的原因

不难理解, 当  $M_{F_1} < M_G$ , 即

$$F_1 = k (f_{(x_1)} + \chi_{(\omega_{\theta_1})} + \psi_{(\theta_1)}) < \frac{mgr_1}{(l \cos \theta_1 + r_1 \cot \theta_1) \cos \alpha_1} \quad (28)$$

或当  $M_{F_2} < M_G$ , 即

$$F_2 = k (f_{(x_2)} + \chi_{(\omega_{\theta_2})} + \psi_{(\theta_2)}) < \frac{mgr_2}{(l \cos \theta_2 + r_2 \cot \theta_2) \cos \alpha_2} \quad (29)$$

时, 章角将会逐渐增大。当章角增大到某一极限值  $\theta_m$  时, 就将导致陀螺倾倒。

## 6. 结论

(1) 高速旋转 (自转和进动) 陀螺能恢复稳定自转状态 (即陀螺稳定性亦或陀螺效应) 或倾倒都是微形变作用力和重力共同作用的结果。

(2) 陀螺进动机理是陀螺自身转动惯性, 而非重力矩的作用。转动惯性是陀螺能保持稳定纯自转状态和能保持稳定进动状态的原因。

(3) 陀螺自转角速度由 (3) 决定, 陀螺进动的角速度由 (19) 式或 (25) 式决定。而进动角速度与自转角速度之间的约束关系则分别满足 (7) 式和 (12) 式或 (8) 式和 (13) 式。

(4) 根据微形作用观点, 若水平支撑面绝对平整光滑, 且绝对刚性, 陀螺将不可能有进动, 只能做稳定自转或倾倒。

说明: 关于陀螺稳定性进动机理分析, 顺时针自转顺时针进动的情形与逆时针自转逆时针进动的情形完全一致, 本文限于篇幅, 不予赘述。

## 参考文献

- [1] 哈尔滨工业大学理论力学教研室. 理论力学 (II) [M]. 北京: 高等教育出版社. 2009 (7), 110-134.
- [2] 邓景元. 陀螺进动机理研究及稳定性分析 [J]. 中国设备工程. 2016 (8): 62, 63.

- [3] 黄绍书, 吴次南. 虚定轴转动平衡原理及实例分析[J]. 亚太物理学期刊. 2019 (1), 1:1-5.
- [4] 黄绍书, 蒋金团. 自行车稳定性问题的研究与诠释[J]. 物理通报. 2017, 11: 67-70.
- [5] 黄绍书, 蒋金团. 自行车“转弯不倒”问题的研究[J]. 物理教师. 2017, 38 (8): 57-58.
- [6] 哈尔滨工业大学理论力学教研室. 理论力学( I ) [M]. 北京: 高等教育出版社. 2009 (7), 260-264.
- [7] 仇九子. 对陀螺进动中一个奇异现象的分析[J]. 现代物理知识. 1998 (10), 3: 36, 37.
- [8] R.P.Feynman, R.B.Leighton, M.Sands 著; 郑永令, 华宏鸣, 吴子仪 译. 费恩曼物理学讲义 (第1卷) [M]. 上海: 上好科学技术出版社. 2013 (1), 210.
- [9] 张庆春, 吴东江, 庄娟, 李玮. 测定陀螺进动角速度的方法[J]. 物理实验. 1997 (17), 2: 53, 54.
- [10] 彭毅, 梁志彬. Sen对空中的陀螺进动效应[J]. 物理学报. 2000 (49), 9: 1670-1677.
- [11] 雷昊, 杨海容, 朱牧, 钮赛赛, 杨尧. 应用于红外制导武器的动力随动陀螺误差分析[J]. 上海航天. 2017 (34), 1: 86-91.
- [12] 洪子昕, 时凯, 艾清. 扭转陀螺的运动研究[J]. 物理实验. 2018 (38), 6: 35-39.
- [13] 傅仙罗. 自由进动陀螺章动阻力分析[J]. 力学学报. 1985 (17), 2: 177-181.
- [14] 张晗, 张宇, 赵辉. 陀螺飞轮动力学特征分析[J]. 系统仿真学报. 2015 (27), 1: 112-117.
- [15] 黎志宏, 陈瑞恩, 程晓东, 王伟超. 水平陀螺结构独轮自平衡机器人研究[J]. 中国机械工程. 2016 (27), 6: 726-731.

## 作者简介



**黄绍书** (1967年生), 学士, 教授, 正高级教师. 研究方向主要为大中学物理教育教学衔接问题及普通物理学, 擅长实践性和实验性研究。