Asia-Pacific Journal of Mathematics and Statistics
亚太数学与统计学期刊
2020; 2(1): 1-4
http://www.sciencepublishinggroup.com/j/apjms

The Classical Minkowski Problem: An Optimization Description (A Brief Review)

Jiapu Zhang

Centre of Informatics and Applied Optimisation, the Federation University Australia, Ballarat, Australia

Email address:
j.zhang@federation.edu.au

To cite this article:
Jiapu Zhang. The Classical Minkowski Problem: An Optimization Description (A Brief Review). Asia-Pacific Journal of Mathematics and Statistics. Vol. 2, No. 1, 2020, pp. 1-4.

Received: December 10, 2019; **Accepted**: March 3, 2020; **Published**: March 16, 2020

Abstract: The research objective of this brief review paper is trying to introduce an optimization description for the classical (discrete) Minkowski problem to our mathematical readers, in the use of as plain and simple mathematical languages as possible. We also summarized some breakthroughs of the research history of classical Minkowski problem, and look forward to seeing a current breakthrough proposed. The classical Minkowski problem can be reduced to find solutions of the famous Monge-Ampere equation. The optimal transportation problem can be reduced to find solutions of the famous Monge-Ampere equation too. Optimal transport theory is an important application of the Minkowski problem. This brief review paper introduced the optimal transportation problem and its applications at the end of this paper. At present, the Monge–Kantorovich optimal transport has found applications in wide range in different fields (including image registration and warping, reflector design, retrieving information from shadowgraphy and proton radiography, seismic tomography and reflection seismology, etc.). In conclusion, the author of this brief review paper described and studied the classical Minkowski problem in optimization languages. Minkowski duality is also needed to study furthermore. This is an interesting research topic for optimization related researchers. There is a wealth of information and insight in the classical Minkowski problem and its optimal transportation problem. This studying is worth the effort.

Keywords: Classical Minkowski Problem, Discrete Minkowski Problem, Convex Analysis, Optimization Theory, History and Open Questions

Minkowski问题: 最优化描述

张家普

澳大利亚联邦大学，信息与应用最优化研究中心，巴拉瑞特，澳大利亚

邮箱
j.zhang@federation.edu.au

摘要：本简短论文的研究目的是用尽可能简单明了的数学语言向我们的数学读者尽力介绍经典的(离散) Minkowski问题的最优化描述，并且综述该问题的突破性的研究历史，展望经典 Minkowski 问题的当前重大研究课题。经典的 Minkowski 问题，最终可以归结为解著名的 Monge-Ampere 方程。求解最优传输问题也可以归结为求解 Monge-Ampere 方程问题；可见最优传输理论是 Minkowski 问题的一个重大应用；本简短论文文末简介了最优传输问题及目前 Monge-Kantorovich 最优运输问题在(图像配准和变形，反光板设计，从皮影摄影和质子射线照相中检索信息，地震层析成像和反射地震学等)不同领域中的广泛应用。Minkowski对偶也值得我们去深入研究。总体上来讲，作者就此问题进行了详细描述及研究。这是相关领域研究人员非常感兴趣的一个课题，论文中涵盖的信息量较多，研究具有一定的参考价值。

关键词：经典 Minkowski问题，离散 Minkowski问题，凸分析，最优化理论，历史及悬而未决问题

1．引言

在数学上，在n-维欧氏空间R^n的凸体是一个内部非空的紧凸集。在微分几何中，高斯映射是从欧氏空间R^3中的一个曲面到单位球面S^2的一映射。高斯映射是以卡尔·弗里德里希·高斯命名。 給出R^3中的曲面X，高斯映射是一個连续映射$N: X \to S^2$，使得$N(p)$是在点p上正交于X的单位向量，就是曲面X在点p处的法向量。

概括地说， Minkowski 问题要求在单位球S^{n-1}上的非负 Borel 测度上作为R^n充实凸体的表面积测度的必要和充分条件。凸体K 的表面积度量S^k 是（n-1)-维 Hausdorff 度量的前推，该度量通过高斯映射限制在K的边界上。Minkowski 问题由 Hermann Minkowski，Aleksandr Danilovich Aleksandrov，Werner Fenchel 和 Børge Jessen [1] 解决：单位球上的Borel 度量 μ 是凸体的表面积度量，当且仅当 μ 在原点具有质心且不集中在一个大的子领域。然后，凸体由 μ 唯一确定，直至平移。

在微分几何中，Minkowski 问题要求构造一个严格凸的紧致 曲面S，该曲面的高斯曲率已指定。更确切地说，问题的输入是在球面上定义的严格正实函数f，并且要构造的曲面在点x处应具有高斯曲率$f(n(x))$，其中$n(x)$表示S在x处的法线。本简短评论论文向我们杂志的读者们介绍 Minkowski 问题的最优化描述 [2]。

2．一个最优化描述 [2-5]

Horn曾经提出了“Shape from Curvature”的想法：给定一个封闭的凸曲面，我们求出它的高斯曲率，用高斯映射将高斯曲率定义在单位球面上。我们能否由定义在单位球面上的（原曲面的）高斯曲率来重建原曲面？

这就是经典的 Minkowski 问题，最终归结为解蒙日-安培方程。下面，我们接着介绍这一问题的几何解法。

我们先考察离散的 Minkowski 问题(见 [3] 的图1)，然后用离散的解法来逼近连续问题。离散 Minkowski 问题相对直观，容易理解。

Minkowski 问题 [3-4]: 在n维欧式空间 R^n 中，给定k个不被包含在 R^n 的半空间里的单位向量 $n_1, n_2, \dots, n_k$，k个正实数 $A_1, A_2, \dots, A_k$，满足条件$A_1n_1 + A_2n_2 + \dots + A_kn_k = 0$。 是否存在一个紧致凸多面体$P$，它有$k$个面$F_1, F_2, \dots, F_k$，每个面$F_i$的法向量是$n_i$，面积为$A_i$？ 如果存在，这样的凸多面体是否唯一？

我们首先解释约束条件 $A_1n_1 + A_2n_2 + \dots + A_kn_k = 0$ 的必要性。假设这样的凸多面体存在，我们向一个超平面 $\langle x,\ n\rangle = 0$ 投影，凸多面体双重覆盖超平面，平面上每一个点或者不被覆盖，或者被覆盖两次。如果一个点被覆盖两次，则一次被正向覆盖，一次反向覆盖。因此，凸多面体在平面上的总投影面积为 0，这意味着：$A_1\langle n_1,\ n\rangle + A_2\langle n_2,\ n\rangle + \dots + A_k\langle n_k,\ n\rangle = 0$。因为超平面的法向量任意，所以我们有$A_1n_1 + A_2n_2 + \dots + A_kn_k = 0$。

Minkowski 证明了凸多面体的存在性，并且证明这样的凸多面体彼此相差一个平移。Minkowski 的证明是基于变分原理。假设每个面F_i的方程为$\langle x,\ n_i\rangle = \ _i$，这里 $_1, \ _2, \dots, \ _k$ 是未知变量，令 $:= (_1, \ _2, \dots, \ _k)$，凸多面体记为 $P(\ )$。我们记多面体 $P(\ )$ 的面 $F_i(\ )$ 的面积为 $w_i(\ )$。考察下列的优化问题

$$\max Vol(P(h))$$

$$\text{s.t. } h \in D = \left\{(h_1, h_2, \dots, h_k) \mid \sum_{i=1}^{k} A_i h_i = 1, w_i(h) \geq 0,\ \forall\, 1 \leq i \leq k\right\}$$

则多面体 $P(\ )$ 的体积是自变量 的可微函数

$$\frac{\partial Vol(P(h))}{\partial h_i} = w_i(h)。$$

首先，我们证明定义域D为 R^k 中的凸集 [2]。 为此，我们需要引进所谓 Minkowski 和的概念(Minkowski Sum)。给定两个多面体 $P, Q \in R^n$，它们的 Minkowski 和定义为：

$$P \oplus Q := \{v + w \mid v \in P, w \in Q\}。$$

关于 Minkowski 和的体积，存在著名的 Brunn-Minkowski 不等式：

$$[Vol(P \oplus Q)]^{1/n} \geq [Vol(P)]^{\frac{1}{n}} + [Vol(Q)]^{1/n}。$$

假设 $_1, \ _2 \in D$，对一切 $\tau \in [0,1]$,

$$P(\tau h_1 + (1-\tau)h_2) = P(\tau h_1) \oplus P((1-\tau)h_2)。$$

同理，我们可以看出对于多面体上的每个面

$$F_i(\tau h_1 + (1-\tau)h_2) = F_i(\tau h_1) \oplus F_i((1-\tau)h_2)。$$

由 Brunn-Minkowski 不等式

$$w_i(\tau h_1 + (1-\tau)h_2) \geq w_i(\tau h_1) \oplus w_i\big((1-\tau)h_2\big) \geq 0。$$

这意味着 $\tau \ _1 + (1-\tau) \ _2 \in D$，$D$为$R^k$ 中的凸集。

多面体 $P(\ )$ 的体积是自变量 的可微函数，定义域D为凸紧集，因此体积函数在D中极值点存在。 我们来验证极值点必为定义域D的内点。体积函数的梯度为

$$\nabla Vol(P(h)) = (w_1(h), w_2(h), \dots, w_k(h))^T.$$

在定义域边界点处，某个面 F_i 的面积 $w_i(\ )$ 为 0。将梯度向平面 $A_1 \ _1 + A_2 \ _2 + \dots + A_k \ _k = 1$ 投影，投影后的梯度第i个分量为

$$-A_i \frac{\sum_j w_j(h) A_j}{\sum_l {A_l}^2} < 0,$$

同时可以验证

$$\frac{\partial w_i(h)}{\partial h_i} < 0,$$

因此边界点处的梯度指向D的内部。这意味着体积函数的极值点必为定义域D的内点。

用 Lagrange 乘子法，我们得到在极值点处：

$$\frac{\partial}{\partial h_i} Vol\left(P(h)\right) - \tau\left(\sum_j A_j h_j - 1\right) = 0,$$

等价地，我们有

$$w_i(h) - \tau A_i = 0.$$

则凸多面体 $P(\tau^{-1/n}$) 即为 Minkowski 问题的解。

我们考察连续情形下的 Minkowski 问题。我们可以用离散情形的 Minkowski 定理来解连续情形的Minkowski定理(由离散的 Minkowski 定理，$\{(n_i,\ A_i)\}$ 决定了一个凸多面体。我们不停地细分球面的三角剖分，得到一系列凸多面体，其极限就是连续 Minkowski 问题的解)。总的来说，用言简意赅简单明了的语言，*Minkowski问题* 是：给定法向量 $n_1, n_2, \ldots, n_k$ 及其面积 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 使得 $A_1 n_1 + A_2 n_2 + \ldots + A_k n_k$ 消失，找一个紧致凸多面体使得它的各面的法向量是 $n_1, n_2, \ldots, n_k$，并且使得相应与 n_i 的面积恰恰是A_i [5] 。

3．研究历史及当前研究课题

维基百科(wikipedia)总结了以下突破性的研究历史 [6]:

1. 在欧几里德3维空间中，可以轻松地将辐射定位问题简化为 Minkowski 问题：在给定的高斯表面曲率上恢复凸形。
2. 短波衍射的反问题被简化为 Minkowski 问题。
3. Minkowski 问题是衍射数学理论以及衍射物理理论的基础。
4. 1953年， Louis Nirenberg 发表了两个长期存在的开放问题的解决方案 [7]，即欧氏3维空间中的 Weyl 问题和 Minkowski 问题。
5. 1959年，Herbert Busemann 发表了 Minkowski 及其相关问题的带边界凸面理论 [8]。
6. 1969年，AV Pogorelov 解决了黎曼空间中的 Weyl 问题 [9]; AV Pogorelov 也 解决欧几里得空间中的多维 Minkowski 问题。
7. 1976年，成秀玉与丘成桐共同研究充分证明了欧几里得空间中高维 Minkowski 问题(实Monge-Ampère 方程的 Dirichlet 问题) [10]。

目前最大的悬而未决的问题是，2007年“Minkowski 问题在 Riemannian 空间的解决” [11] 是否正确。

经典的Minkowski问题，最终可以归结为解著名的 Monge-Ampere 方程。对于数学最优化和凸分析研究领域来说，与Minkowski 问题紧密相关的一个问题是：最优传输理论 (研究最佳运输和资源分配)。最优传输问题最早是由法国数学家 Gaspard Monge 于1781年提出 [12]；苏联数学家和经济学家Leonid Kantorovich在该领域取得了重大进展 [13-14] - 因此有时运输问题被称为 Monge-Kantorovich 运输问题；运输问题的线性规划公式也称为 Hitchcock-Koopmans 运输问题 [15]。法国数学家 Brenier 建立了最优传输问题和凸函数之间的内在联系, 进一步得到著名的 Monge-Ampere 方程。因此，最后求解最优传输问题也可以归结为求解 Monge-Ampere 方程问题。显然最优传输理论是Minkowski问题的一个重大应用。目前 Monge-Kantorovich 最优运输问题已在不同领域中得到广泛应用, 其中包括： 图像配准和变形, 反光板设计, 从皮影摄影和质子射线照相中检索信息, 地震层析成像和反射地震学, 等。Minkowski对偶 [16] 在数学最优化及其它领域的应用也值得我们去深入研究。

参考文献

[1] Schneider R (1993) Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory (encyclopedia of mathematics and its applications), Cambridge: Cambridge University Press.

[2] Gu XF (2016) Optimal Transport Theory Lecture Note 3 (in Chinese): http://blog.sciencenet.cn/blog-2472277-954180.html. Accessed on 25/02/2016.

[3] Gu X, Luo F, Sun J, Yau S-T (2013) Variational principles for Minkowski type problems, discrete optimal transport, and discrete Monge-Ampere equations: https://arxiv.org/pdf/1302.5472.pdf. Accessed on 29/11/2019.

[4] Su ZY, Sun J, Gu XF, Luo F, Yau S-T (2014) Optimal mass transport for geometric modeling based on variational principles in convex geometry. Engineering with Computers 30 (4) 475–486.

[5] Merigot Q (2011) A multiscale approach to optimal transport. Computer Graphics Forum 30 (5) 1584–1592.

[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Minkowski_problem, https://en.wikipedia.org/wiki/Talk:Minkowski_problem, Accessed on 29/11/2019.

[7] Nirenberg L (1953) The Weyl and Minkowski problems in differential geometry in the large. Communications on Pure and Applied Mathematics 6 (3) 337-394.

[8] Busemann H (1959) Minkowski's and related problems for convex surfaces with boundaries. Michigan Mathematical Journal 6 (3) 259-66.

[9] Pogorelov AV (1979) The Minkowsky Multidimensional Problem, Washington: Scripta, ISBN 0470–99358–8.

[10] Cheng S-Y, Yau S-T (1976) On the regularity of the solution of the n-dimensional Minkowski problem. Communications on Pure and Applied Mathematics 29 (5) 495-516.

[11] Bodrenko AI (2007) The solution of the Minkowski problem for open surfaces in Riemannian space: https://arxiv.org/pdf/0708.3929.pdf. Accessed on 29/11/2019.

[12] Monge G (1781) Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais. Histoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris, avec les Mémoires de Mathématique et de Physique pour la même année (Mem Math Phys Acad Royale Sci) 666–704.

[13] Kantorovich L (1942) On the translocation of masses. C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.) 37: 199–201.

[14] Villani C (2003) Topics in Optimal Transportation. American Mathematical Soc. p. 66. ISBN 978-0-8218-3312-4.

[15] Rao SS (2009) Engineering Optimization: Theory and Practice (4th ed.). John Wiley & Sons. p. 221. ISBN 978-0-470-18352-6.

[16] Kutateladze SS, Rubinov AM (1972) Minkowski duality and its applications. Russian Mathematical Surveys 27 (3) 137-191.