Containing High Order Compact Scheme Source of Steady Convection-Diffusion Equation

Rongfei Wang[*], Weihua Wang, Jinhong Yang

Institute of Applied Physics, Army Officer Acadamy, Hefei, Anhui

Email address:
18655053356@163.com (Rongfei Wang), whwang@ipp.ac.cn (Weihua Wang), yjh_pbxy@sina.com (Jinhong Yang)
[*]Corresponding author

Abstract: Convection-diffusion equation have a wide range of applications in many practical engineering problems, such as magnetic confinement fusion problems, heat transfer, particle diffusion. Traditional solutionof convection-diffusion equation in magnetic confinement fusion is Crank-Nicolson scheme. This paper presents a new numerical solution of one-dimensional steady-containing source convection diffusion equation high accuracy difference schemes $O\left(\tau^2 + h^4\right)$, which proved to be unconditionally stable using Fourier analysis, numerical experiments show the accuracy and robustness of this format, this scheme has a higher accuracy.

Keywords: Convection-Diffusion Equation, Compact Difference, High Order

含源定常对流扩散方程的高精度紧致差分格式

王荣飞[*], 汪卫华, 杨锦宏

应用物理研究所，陆军军官学院，合肥，中国

邮箱
18655053356@163.com（王荣飞），whwang@ipp.ac.cn（汪卫华），yjh_pbxy@sina.com（杨锦宏）

摘要：对流扩散方程在许多工程实际问题中都有着广泛的应用，如磁约束聚变，热传导，粒子扩散等问题。传统的磁约束聚变的数值模拟中对流扩散方程的差分采用的是Crank-Nicolson格式，本文提出了一种新的数值求解一维含源定常对流扩散方程高精度 $O\left(\tau^2 + h^4\right)$ 差分格式，利用Fourier分析法证明该格式是无条件稳定的，数值实验证明了本文格式的精确性和稳定性，该方法具有更高的计算精度。

关键词：对流扩散方程，紧致差分，高精度

1. 引言

对流扩散方程在许多工程实际问题中 都有着广泛的应用，如热传导，粒子扩散等问题。有限差分方法常被用于该问题的数值求解，如中心差分格式，Dufort-Franket差分格式，指数型差分格式，Samarski差分格式，Crank-Nicolson格式，文章[1]将指数变换应用于对流扩散方程，把方程转化为线性扩散方程的齐次Neumann边值问题，对空间采用四阶紧致差分逼近格式，时间变量应用二级四阶Runge-Kutta方法构造出一维对流扩散方程的差

分格式。文章[2]中用时间离散方法对对流扩散方程的求解得到了空间方向具有七阶精度，时间方向具有二阶精度的差分格式。

受以上文献启发，本文引入指数变换 $u = m \cdot \exp\left[ax/(2\varepsilon)\right]$，$m = v \cdot \exp(bt)$ 构造出了一种新的一维定常对流扩散方程时间二阶、空间四阶精度格式，然后证明该格式是无条件稳定的，并给出了数值算例。

考虑一维非定常含源对流扩散方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a\dfrac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t) \\ u(x,0) = d(x), 0 < x < 1 \\ u(0,t) = g_0(x), u(1,t) = g_1(x), t > 1 \end{cases} \quad (1)$$

其中，$u(x,t)$ 为待求未知量，$v > 0$ 为扩散系数，$a \neq 0$ 为对流系数，$f(x,t)$ 为非齐次项，物理上也叫做源汇项，$g_0(x), g_1(x), d(x)$ 均为已知函数。

2. 高精度差分格式的建立与求解

首先将其区域 $(0,1) \times (0,T)$ 剖分成差分网格，记 h 和 τ 分别是 x 方向和 t 方向的网格步长，其中 $h = 1/(N+1)$，N 表示内点的个数，$x_i = ih, i = 0,1,\ldots,N+1$，$t_k = k\tau, k = 0,1,\ldots$，$t_{k+1/2} = (k+1/2)\tau$，$u_{ik}$ 表示对流扩散方程（1）在离散点 (x_i, t_k) 处的数值解。引入指数变换：

$$u = m \cdot \exp\left[ax/(2\varepsilon)\right] \quad (2)$$

将以上变换代入到输运方程（1）中，则原方程可以化为扩散反应方程：

$$\frac{\partial m}{\partial t} = bm + \varepsilon\frac{\partial^2 m}{\partial x^2} + s \quad (3)$$

其中，$b = -a^2/(4\varepsilon)$，$s = F \cdot \exp\left[-ax/(2\varepsilon)\right]$，再令

$$m = v \cdot \exp(bt) \quad (4)$$

将（4）代入（3），整理可得：

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f \quad (5)$$

其中，$f = e^{-bt}s$。令：

$$w = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (6)$$

则由（5）式，有

$$w = \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{\partial v}{\partial t} - f(x,t)\right] \quad (7)$$

定义网格函数：$V_i^k = v(x_i, t_k)$，$W_i^k = w(x_i, t_k)$，$0 \le i \le m$，$0 \le k \le n$。

由泰勒展开式可得：

$$\delta_x^2 V_i^k = \frac{v_{i+1}^k - 2v_i^k + v_{i-1}^k}{h^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_i, t_k) + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(x_i, t_k) + \frac{h^4}{360}\frac{\partial^6 v}{\partial x^6}(\xi_{ik}, t_k) = v(x_i, t_k) + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x_i, t_k) + \frac{h^4}{360}\frac{\partial^6 v}{\partial x^6}(\xi_{ik}, t_k)$$

$$= w_i^k + \frac{h^2}{12}\left[\delta_x^2 W_i^k - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(\eta_{ik}, t_k)\right] + \frac{h^4}{360}\frac{\partial^6 v}{\partial x^6}(\xi_{ik}, t_k) = \frac{1}{12}\left(W_{i-1}^k + W_i^k + W_{i+1}^k\right) + \left[\frac{1}{360}\frac{\partial^6 v}{\partial x^6}(\xi_{ik}, t_k) - \frac{h^2}{144}\frac{\partial^6 v}{\partial x^6}(\eta_{ik}, t_k)\right]h^4,$$

其中 $\xi_{ik}, \eta_{ik} \in (x_{i-1}, x_{i+1})$。将上式中上标为 k 和 k+1 的两个等式相加并除以 2，应用公式 $W_i^{k+\frac{1}{2}} = \dfrac{w(x_i, t_k) + w(x_i, t_{k+1})}{2} = w(x_i, t_{k+1/2}) + \dfrac{\tau^2}{8}\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x_i, \theta_{ik})$，可得：

$$\frac{1}{2}\left(\delta_x^2 V_i^k + \delta_x^2 V_i^{k+1}\right) = \frac{1}{12}\left(W_{i-1}^{k+\frac{1}{2}} + W_i^{k+\frac{1}{2}} + W_{i+1}^{k+\frac{1}{2}}\right) + \left[\frac{1}{360}\frac{\partial^6 v}{\partial x^6}(\bar{\xi}_{ik}, \bar{t}_k) - \frac{h^2}{144}\frac{\partial^6 v}{\partial x^6}(\bar{\eta}_{ik}, \bar{t}_k)\right]h^4$$

$$= \frac{1}{12}\left[w(x_{i-1}, t_{k+1/2}) + 10w(x_i, t_{k+1/2}) + w(x_{i+1}, t_{k+1/2})\right] + \frac{\tau^2}{8} \cdot \frac{1}{12} \cdot \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x_{i-1}, \theta_{ik}) + 10\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x_i, \theta_{ik}) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x_{i+1}, \theta_{ik})\right]$$

$$+ \left[\frac{1}{360}\frac{\partial^6 v}{\partial x^6}(\bar{\xi}_{ik}, \bar{t}_k) - \frac{h^2}{144}\frac{\partial^6 v}{\partial x^6}(\bar{\eta}_{ik}, \bar{t}_k)\right]h^4$$

利用（7），应用公式 $\dfrac{\partial v}{\partial t}(x_i, t_{k+1/2}) = \delta_t V_i^{k+1/2} - \dfrac{\tau^2}{24} \cdot \dfrac{\partial^3 v}{\partial t^3}(x_i, \vartheta_{ik})$ 得到

$$\delta_x^2 V_i^{k+1/2} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{12}\left(\delta_t V_{i-1}^{k+1/2} + 10\delta_t V_i^{k+1/2} + \delta_t V_{i+1}^{k+1/2}\right)$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{12}\left(f\left(x_{i-1},t_{k+1/2}\right)+10f\left(x_i,t_{k+1/2}\right)+f\left(x_{i+1},t_{k+1/2}\right)\right)-\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{\tau^2}{24}\cdot\frac{1}{12}\cdot\left[\frac{\partial^3 v}{\partial t^3}\left(x_{i-1},\vartheta_{ik}\right)+10\frac{\partial^3 v}{\partial t^3}\left(x_i,\vartheta_{ik}\right)+\frac{\partial^3 v}{\partial t^3}\left(x_{i+1},\vartheta_{ik}\right)\right]$$

$$+\frac{\tau^2}{8}\cdot\frac{1}{12}\cdot\left[\frac{\partial^4 v}{\partial x^2\partial t^2}\left(x_{i-1},\theta_{ik}\right)+10\frac{\partial^4 v}{\partial x^2\partial t^2}\left(x_i,\theta_{ik}\right)+\frac{\partial^4 v}{\partial x^2\partial t^2}\left(x_{i+1},\theta_{ik}\right)\right]+\left[\frac{1}{360}\frac{\partial^6 v}{\partial x^6}\left(\bar{\xi}_{ik},\bar{t}_k\right)-\frac{h^2}{144}\frac{\partial^6 v}{\partial x^6}\left(\bar{\eta}_{ik},\bar{t}_k\right)\right]h^4, \quad (8)$$

其中 $\bar{\xi}_{ik},\bar{t}_k\in\left(x_{i-1},x_{i+1}\right)$，$\bar{t}_k,\theta_{ik},\vartheta_{ik}\in\left(t_k,t_{k+1}\right)$。

记

$$R_{ik}=\varepsilon\left[\frac{h^2}{144}\frac{\partial^6 v}{\partial x^6}\left(\bar{\eta}_{ik},\bar{t}_k\right)-\frac{1}{360}\frac{\partial^6 v}{\partial x^6}\left(\bar{\xi}_{ik},\bar{t}_k\right)\right]h^4+\frac{\tau^2}{24}\cdot\frac{1}{12}\cdot\left[\frac{\partial^3 v}{\partial t^3}\left(x_{i-1},\vartheta_{ik}\right)+10\frac{\partial^3 v}{\partial t^3}\left(x_i,\vartheta_{ik}\right)+\frac{\partial^3 v}{\partial t^3}\left(x_{i+1},\vartheta_{ik}\right)\right]$$

$$+\frac{\tau^2}{8}\cdot\frac{\varepsilon}{12}\cdot\left[\frac{\partial^4 v}{\partial x^2\partial t^2}\left(x_{i-1},\theta_{ik}\right)+10\frac{\partial^4 v}{\partial x^2\partial t^2}\left(x_i,\theta_{ik}\right)+\frac{\partial^4 v}{\partial x^2\partial t^2}\left(x_{i+1},\theta_{ik}\right)\right] \quad (9)$$

略去小量项 R_{ik}，并且用 $v_{i,k}$ 表示 V_i^k 的近似值，得到下列差分格式

$$\frac{1}{12}\left(\delta_t v_{i-1}{}^{k+1/2}+10\delta_t v_i{}^{k+1/2}+\delta_t v_{i+1}{}^{k+1/2}\right)-\varepsilon\delta_x{}^2 v_i{}^{k+1/2}$$

$$=\frac{1}{12}\left[f\left(x_{i-1},t_{k+1/2}\right)+10f\left(x_i,t_{k+1/2}\right)+f\left(x_{i+1},t_{k+1/2}\right)\right]$$

$$1\le i\le m-1,\quad 0\le k\le n-1. \quad (10\text{-}1)$$

$$V_i^0=\varphi\left(x_i\right),\quad 1\le i\le m, \quad (10\text{-}2)$$

$$V_0^k=\partial\left(t_k\right),\quad V_m^k=\beta\left(t_k\right),\quad 1\le k\le m, \quad (10\text{-}3)$$

记

$$c=\max\left\{\frac{1}{24}\max_{\substack{0\le x\le l\\0\le t\le T}}\left|\frac{\partial^3 v(x,t)}{\partial t^3}\right|+\frac{\varepsilon}{8}\max_{\substack{0\le x\le l\\0\le t\le T}}\left|\frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^2\partial t^2}\right|,\frac{7\varepsilon}{720}\max_{\substack{0\le x\le l\\0\le t\le T}}\left|\frac{\partial^6 v(x,t)}{\partial t^6}\right|\right\}, \quad (11)$$

则差分格式（10）式的局部截断误差 R_{ik}，满足

$$R_{ik}\le c\left(\tau^2+h^4\right),\ 1\le i\le m-1,\ 0\le k\le n-1. \quad (12)$$

差分格式（10）的结点图如图1所示，它也是一个2层格式。
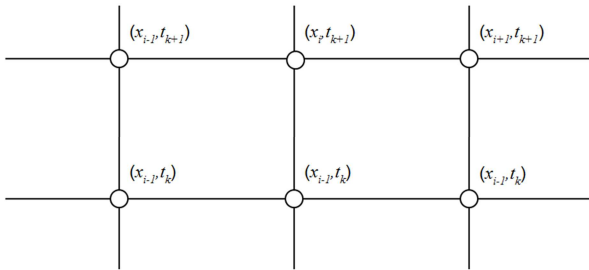
图1 紧致差分的结点图。

通过变换（2）、（4）的逆变换将（10-1）展开，并且令 $r=\tau/h^2$，可推导出来方程（1）的四阶精度隐式差分格式

$$a_{i-1}u_{i-1,k+1}+a_i u_{i,k+1}+a_{i+1}u_{i+1,k+1}=b_{i-1}u_{i-1,k}+b_i u_{i,k+1}+b_{i+1}u_{i+1,k}+c_i \quad (13)$$

其中

$$a_{i-1}=\left(1-6\varepsilon r\right)\exp\left\{\frac{a^2\tau}{4\varepsilon}+\frac{ah}{2\varepsilon}\right\},$$

$$a_i=2\left(5+6\varepsilon r\right)\exp\left\{\frac{a^2\tau}{4\varepsilon}\right\},$$

$$a_{i+1}=\left(1-6\varepsilon r\right)\exp\left\{\frac{a^2\tau}{4\varepsilon}-\frac{ah}{2\varepsilon}\right\},$$

$$b_{i-1}=\left(1+6\varepsilon r\right)\exp\left\{\frac{ah}{2\varepsilon}\right\},$$

$$b_i=2\left(5-6\varepsilon r\right),$$

$$b_{i+1} = (1+6vr)\exp\left\{-\frac{\alpha h}{2v}\right\},$$

$$c_i = \frac{\tau}{2}\exp\left\{\frac{a^2\tau}{4\varepsilon}+\frac{ah}{2\varepsilon}\right\}f_{i-1,k+1} + 5\tau\exp\left\{\frac{a^2\tau}{4\varepsilon}\right\}f_{i,k+1}$$

$$+ \frac{\tau}{2}\exp\left\{\frac{a^2\tau}{4\varepsilon}-\frac{ah}{2\varepsilon}\right\}f_{i+1,k+1} + \frac{\tau}{2}\exp\left\{\frac{ah}{2\varepsilon}\right\}f_{i-1,k}$$

$$+ 5\tau f_{i,k} + \exp\left\{-\frac{ah}{2\varepsilon}\right\}f_{i+1,k}$$

由差分格式的推导过程可以知道，该两层三点差分格式的截断误差为 $O(\tau^2 + h^4)$。

在格式（13）中，令空间下标为 $i = 1, 2, \ldots, N$，便可以得到差分方程组的矩阵形式 $Au_{k+1} = Bu_k + RH$

其中

$$A = \begin{bmatrix} a & b & & & \\ c & a & b & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & c & a & b \\ & & & c & a \end{bmatrix}_{M\times N}$$

$$B = \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} & & & \\ \bar{c} & \bar{a} & \bar{b} & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & \bar{c} & \bar{a} & \bar{b} \\ & & & \bar{c} & \bar{a} \end{bmatrix}_{M\times N}\qquad（14）$$

$$\begin{cases} a = 2(5+6\varepsilon r)\exp\left[a^2\tau/(4\varepsilon)\right] \\ b = (1-6\varepsilon r)\exp\left[a^2\tau/(4\varepsilon)-ah/(2\varepsilon)\right] \\ c = (1-6\varepsilon r)\exp\left[a^2\tau/(4\varepsilon)+ah/(2\varepsilon)\right] \\ \bar{a} = 2(5-6\varepsilon r) \\ \bar{b} = (1+6\varepsilon r)\exp\left[-ah/(2\varepsilon)\right] \\ \bar{c} = (1+6\varepsilon r)\exp\left[ah/(2\varepsilon)\right] \end{cases}$$

$k\tau$ 时刻的解向量为 u_k，表示为

$$u_k = \begin{bmatrix} u_{1,k} \\ u_{2,k} \\ \vdots \\ u_{N,k} \end{bmatrix}\qquad（15）$$

3．稳定性分析

假设边界条件精确满足，并且右端项 f 无误差存在，采用离散的Fourier分析方法对格式（10）进行稳定性分析：

$$A_{j-1}u_{j-1}^{n+1} + A_j u_j^{n+1} + A_{j+1}u_{j+1}^{n+1}$$
$$= B_{j-1}u_{j-1}^{n} + B_j u_j^{n} + B_{j+1}u_{j+1}^{n} \qquad（16）$$

用 v_j^n 表示计算 u_j^n 所产生的误差，则 v_j^n 满足齐次方程

$$A_{j-1}v_{j-1}^{n+1} + A_j v_j^{n+1} + A_{j+1}v_{j+1}^{n+1}$$
$$= B_{j-1}v_{j-1}^{n} + B_j v_j^{n} + B_{j+1}v_{j+1}^{n} \qquad（17）$$

其中：

$$A_{j-1} = 1-6r,\ A_j = 10+12r,\ A_{j+1} = 1-6r,\ B_{j-1} = 1+6r,\ B_j = 10-12r,\ B_{j+1} = 1+6r$$

令 $v_j^n = \lambda^n e^{i\sigma jh}$，其中，i 为虚数单位，$\sigma$ 为波数，运用关系式 $e^{ix} = \cos x + i\sin x$，代入（17），得到增长因子为

$$G = \frac{\lambda^{n+1}}{\lambda^n} = \frac{2\cos\sigma h + 10 - 12(1-\cos\sigma h)}{2\cos\sigma h + 10 + 12(1-\cos\sigma h)}$$

因为 $1-\cos\sigma h \geq 0$，
所以

$$|G| \leq 1,$$

即格式（10）为无条件稳定的，同理，（13）也为无条件稳定的。

4．数值算例

考虑模型：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = v\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(x^2 - 3x + 1 + 2v\right)\exp(-t) \\ 0 < x < 1, t > 0 \\ u(x,0) = x(1-x) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases}$$

其解析解为 $u(x,0) = x(1-x)\exp(-t)$。表1给出了 h=0.1，τ=0.01，x=0.5时，不同差分格式的计算误差随时间的变化。表2给出了取不同步长比时，紧致差分格式数值解的最大误差 $E_\infty(h,\tau) = \max\limits_{\substack{1\leq i\leq m-1 \\ 1\leq k\leq n}}\left|u(x_i,t_k) - u_i^k\right|$。

表1 不同差分格式数值解与精确解的误差变化。

时间t（s）	迎风差分格式	中心显式差分格式	Crank-Nicolson格式	四阶紧致差分格式
0.1	3.569713×10^{-3}	4.964423×10^{-4}	6.627795×10^{-5}	1.467825×10^{-6}
0.2	4.563294×10^{-3}	7.963428×10^{-4}	9.456913×10^{-5}	1.763545×10^{-6}
0.3	6.913451×10^{-3}	9.964824×10^{-4}	1.635425×10^{-4}	2.635791×10^{-6}
0.4	5.621643×10^{-3}	1.659135×10^{-3}	1.001472×10^{-4}	3.937543×10^{-6}
0.5	9.121533×10^{-3}	1.033639×10^{-3}	8.752287×10^{-5}	4.786354×10^{-6}
0.6	1.003694×10^{-2}	7.694563×10^{-4}	4.375623×10^{-5}	3.556357×10^{-6}
0.7	8.364695×10^{-3}	7.546397×10^{-4}	3.336874×10^{-5}	2.944531×10^{-6}
0.8	9.643482×10^{-3}	5.697213×10^{-4}	8.634985×10^{-5}	2.012211×10^{-6}
0.9	6.316181×10^{-3}	3.200156×10^{-4}	1.675647×10^{-4}	2.867214×10^{-6}
1	7.236458×10^{-3}	7.984543×10^{-4}	9.345633×10^{-5}	3.645697×10^{-6}

表2 取不同步长时紧致差分格式数值解的最大误差。

h	τ	$E_\infty(h,\tau)$	$E_\infty(2h,2\tau)/E_\infty(h,\tau)$
1/10	1/100	5.032641×10^{-6}	*
1/20	1/400	3.072430×10^{-7}	16.38
1/40	1/1600	1.865471×10^{-8}	16.47
1/80	1/48000	1.181426×10^{-8}	15.79
1/160	1/19200	7.288254×10^{-11}	16.21

经过比较可以看出，相同条件下本文差分格式的精度要明显优于其他几种常见的差分格式，在空间步长缩小到原来的1/2，时间步长缩小到原来的1/4时，最大误差缩小到原来的1/16。这充分体现了四阶格式的精度特性，所以本文的四阶紧致差分格式实现了在较粗网格下获得较高精度数值解的目的。

5．结论

采用指数变换 $u = m\cdot\exp[ax/(2\varepsilon)]$ 和 $m = v\cdot\exp(bt)$，将对流扩散方程转化为抛物线方程，对抛物线方程采用紧致差分格式差分，使其截断误差为 $O(\tau^2 + h^4)$，经过证明该格式是无条件稳定的，数值算例验证了格式的有效性。因此，该差分格式可用于求解磁约束聚变中的对流扩散方程。

致谢

参考文献

[1] 王慧蓉. 求解对流扩散方程的紧致二级四阶Runge-Kutta差分格式[J]. 云南民族大学学报：自然科学版，2015，24(5)：382-385。

[2] 杨志峰. 含源汇定常对流扩散问题紧致四阶差分格式[J]. 科学通报，1991，38(2)：113-116。

[3] 孙志忠. 偏微分方程数值解法[M]. 北京：科学出版社，2005。

[4] 钱凌志，顾海波. 高阶紧致差分格式结合外推技巧求解对流扩散方程[J]. 山东大学学报：理学版，2011，46(12)：39-43。

[5] 张阳. 线性对流占优扩散问题的交替方向差分流线扩散法[J]. 计算数学，2007，29(1)：49-66。

[6] 何文平. 求解对流扩散方程的四中差分格式的比较[J]. 物理学报，2004.(10)：3258-3264。

[7] 王倩倩，李鑫，孙启航. 一维变系数对流扩散方程的一个紧致差分格式. 江苏师范大学学报：自然科学版，2013，31(2)：21-24。

[8] 王彩华. 一维对流扩散方程的一类新型高精度紧致差分格式[J]. 水动力学研究与进展：A辑，2004，(19)：655。

[9] 戴嘉尊. 微分方程数值解法[M].2版.南京：东南大学出版社，2004。

[10] Patanker S V. Numerical heat transfer and fluid flow [M]. New York: Hemisphere Publishing Corporation, 1980.