Science Discovery
2021; 9(6): 329-334
http://www.sciencepublishinggroup.com/j/sd
doi: 10.11648/j.sd.20210906.19
ISSN: 2331-0642 (Print); ISSN: 2331-0650 (Online)

The Boundary Regularity for Normalized Infinity Laplace Equations

Yanhui Li[*], Xiaotao Huang

Department of Mathematics, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing, China

Email address:
liyanhui@nuaa.edu.cn (Yanhui Li), xthuang@nuaa.edu.cn (Xiaotao Huang)
[*]Corresponding author

To cite this article:
Yanhui Li, Xiaotao Huang. The Boundary Regularity for Normalized Infinity Laplace Equations. *Science Discovery*.
Vol. 9, No. 6, 2021, pp. 329-334. doi: 10.11648/j.sd.20210906.19

Received: October 11, 2021; **Accepted**: November 9, 2021; **Published**: November 12, 2021

Abstract: Infinity Laplace equations, which derive from minimal Lipschitz extensions and absolutely minimal variational problems, have been widely applied in zero-sum tug-of-war game, optimal transport, shape deformation and so on. However, due to the quasi-linearity, extreme degeneration (non-degeneration only in the gradient direction) and non-divergence of the equations, it is difficult to define its classical or weak solutions. After introducing the idea of viscosity solutions, the theoretical research of infinite Laplace equations begin to develop. We study the boundary Hölder regularity of solutions for inhomogeneous normalized infinite Laplace equations on bounded domains. Main ideas are as follows: Firstly, we get bounded estimate of solutions through constructing barrier functions about super(sub)-solutions. Secondly, we use iterative method to approach the solutions of equations. Finally, we obtain regularity estimates near the boundary by calculating error between barrier functions and solutions of equations. This paper proves that the visvosity solutions of inhomogeneous normalized infinite Laplace equations are Hölder continious on Lipschitz boundary provided that the region boundary is Lipschitz continuous, the right inhomogeneous term is positive (negative) continuous and the boundary values are Hölder continuous. On the basis of our conclusion, the global Hölder regularity theory of the normalized infinite Laplace equations can be obtained combining with the internal regularity estimates. In addition, this method can be extended to the boundary estimates of the infinite fractional Laplace equations.

Keywords: Normalized Infinity Laplace Equations, Boundary Regularity, Barrier Functions, Iterative Method

非齐次规范无穷Laplace方程解的边界正则性

李艳辉[*]，黄小涛

南京航空航天大学理学院数学系，南京，中国

邮箱
liyanhui@nuaa.edu.cn（李艳辉），xthuang@nuaa.edu.cn（黄小涛）

摘要：无穷Laplace方程起源于极小Lipschitz延拓和绝对极小变分问题，在二人零和博弈的争夺模型、图像处理、最优传输问题、形变等问题中有广泛的应用。但由于方程的拟线性、极强的退化性(仅在梯度方向是非退化的)和非散度性，导致无法给出方程的古典解或者弱解定义。在引入粘性解的思想后，无穷Laplace方程的理论研究开始发展起来。本文研究了有界区域上非齐次规范无穷Laplace方程解在边界上的Hölder正则性。主要思想如下：首先构造方程上(下)解的闸函数得到方程解的有界估计，然后利用迭代方法得到闸函数列来逼近方程的解，最后计算闸函数和方程解的误差得到方程解在边界上的正则性估计。本文证明了当区域边界是Lipschitz连续、右端非齐次项是正(负)连续函数、边界值是Hölder连续时，非齐次规范无穷Laplace方程的粘性解在Lipschitz边界上是Hölder连续的。在本结论的基础上结合内部正则性估计可以得到规范无穷Laplace方程的全局正则性理论，另外本方法可以推广到分数阶无穷Laplace方程的边界估计。

关键词：规范无穷Laplace方程，边界估计，闸函数，迭代法

1．引言

关于无穷Laplace方程的研究最早起源于 L^∞ 变分。上世纪80年代开始，众多学者对含无穷Laplace算子的方程正则性进行研究。关于齐次方程内部正则性，Aronsson证明了无穷调和函数的正则性至多是 $C^{1,1/3}$ [1]，Bhattacharya用和锥函数的比较性质证明了无穷调和函数的Harnack不等式[2],Savin和Evans-Savin在中证明了二维无穷调和函数的 C^α 和 $C^{1,\alpha}$ 正则性[3-4]，Evans和Smart进一步研究了无穷调和函数在任意维情况下的可微性[5]。关于齐次方程边界正则性，洪探究了无穷调和函数的边界可微性[6]，王和俞在文献利用和锥函数的比较性质给出了无穷调和函数的边界正则性[7]，冯和洪研究了无穷调和函数逐点边界可微性[8]。关于非齐次方程，Lingdren研究了非齐次无穷Laplace方程边值问题解的可微性[9]。Rosset在用p-laplace逼近的方法研究了非齐次无穷Laplace方程边值问题解凸集上解的水平集的凸性及对称性[10]，洪探究了非齐次无穷Laplace方程的边界可微性[11]，Mebrate和Mohammed证明了非齐次Finsler无穷Laplace方程的Harnack不等式和均值原理[12]，冯和洪研究了非齐次无穷Laplace方程在凸区域的梯度估计和边界可微性[13]，Koch、张和周研究了非齐次无穷Laplace方程在平面上的Sobolev正则性[14]。

本文重点研究非齐次规范无穷Laplace方程解的边界正则性。规范无穷Laplace算子的一般形式为

$$\Delta_\infty^N u(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{|Du|^2}\left\langle D^2uDu,Du\right\rangle\\ \left[\lambda_{\min}\left(D^2u(x)\right),\lambda_{\max}\left(D^2u(x)\right)\right]\end{cases}\tag{1}$$

其中 Du 表示 u 的梯度， D^2u 表示 u 的Hessian矩阵。无穷Laplace算子形式为 $\Delta_\infty u(x)=\left\langle D^2uDu,Du\right\rangle$ ，当 $|Du|\neq 0$ 时， $\Delta_\infty u(x)=0$ 和 $\Delta_\infty^N u(x)=0$ 是等价的，但显然 $\Delta_\infty u(x)=f(x)$ 和 $\Delta_\infty^N u(x)=f(x)$ 不是等价的。

非齐次规范无穷Laplace方程的研究开始于Peter、Schramm、Sheffield和Wilson。他们指出无穷规范Laplace方程与二人零和博弈(tug-of-war)有着密切的关系，并通过博弈论证明了方程解的存在性、唯一性以及比较原理[15]。至于无穷规范方程的正则性，由于算子定义的奇异性和非线性，研究仍处于起步阶段。Rahul Jain和Nagaraj用复分析边界分布的方法给出Lipschitz连续Dirichlet边界条件下无穷调和函数的 $C^{1,1/3}$ 正则性[16]。陆和王从PDE角度证明了非齐次规范无穷Laplace方程

$$\begin{cases}\Delta_\infty^N u(x)=f(x), & x\in\Omega,\\ u(x)=g(x), & x\in\Omega,\end{cases}\tag{2}$$

粘性解的存在性，唯一性和比较原理和解的Lipschitz正则性[17]。Charro、Philippis、Castro和Maximo证明了方程解的弱ABP估计[18]。特别的，当 $f(x)=1,g(x)=0$ 时，Graziano和Ilaria研究了Dirichlet问题

$$\begin{cases}-\Delta_\infty^N u(x)=1, & x\in\Omega,\\ u(x)=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{3}$$

唯一解的正则性，他们证明了如果u局部半凸，那么u处处可微[19]。蒋、刘和杨研究了含无穷Laplace算子的渗流问题，建立了该问题严格正粘性解和非负粘性解关于时间变量的Lipschitz估计[20]。由于受边界区域以及边界上函数值的正则性的影响，边界正则性一直是研究的难点。本文不同于洪[9]和Lindgren[11]中的方法，我们通过构造闸函数的方法研究非齐次规范无穷Laplace方程

$$\begin{cases}-\Delta_\infty^N u(x)=f(x), & x\in\Omega,\\ u(x)=g(x), & x\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{4}$$

的边界正则性估计并得到以下结论：

定理1.1假设 $\Omega\subset R^n$ 为边界Lipschitz光滑的有界开区域， u 为方程(4)的粘性解。如果 $f(x)\in C(x)\cap L^\infty(\Omega)$ 满足 $\inf_\Omega f(x)>0\left(\sup_\Omega f(x)<0\right)$，边界值 $g(x)\in C^\alpha(\partial\Omega)$，则方程(4)的粘性解在边界上是Hölder连续的，且有

$$[u]_{C^\beta(\partial\Omega)}\le C\left(\|u\|_{L^\infty(\Omega)}+[g]_{C^\alpha(\partial\Omega)}+\|f\|_{L^\infty(\Omega)}\right),\tag{5}$$

其中指数β依赖于K,α,n，K为Lipschitz常数。

说明：(1)在证明过程中由于使用了比较原理，条件 $\inf_\Omega f(x)>0\left(\sup_\Omega f(x)<0\right)$ 是必须的。

(2)从证明过程可以发现指数β一般比较小，且 $0<\beta<\alpha$。

2．基础知识

本节给出无穷规范Laplace方程定义和一些结论。

2.1．规范无穷Laplace方程

我们首先介绍规范无穷Laplace方程的粘性解定义。

定义2.1[17]设 $u\in C^1(\Omega)$，对任意的 $x_0\in\Omega$ 和任意的检验函数 $\varphi\in C^2(\Omega)$，如果只要且 $u-\varphi$ 在 x_0 取得局部极大(小)值，就有

$$-\Delta_\infty^N\varphi(x)\ge(\le)f(x_0),\tag{6}$$

那么则称 u 在 Ω 中是方程 $-\Delta_\infty^N u(x)=f(x)$ 的粘性下(上)解。若 u 在 Ω 中既是方程的粘性下解又是粘性上解，则称 u 在 Ω 中是方程的粘性解。

陆和王证明了比较原理[17]，这是我们使用闸函数逼近的理论依据。

定理2.2假设 $u,v\in C(\overline{\Omega})$ 分别是

$$-\Delta_\infty^N u(x)\le f(x),-\Delta_\infty^N u(x)\ge f(x), \tag{7}$$

的粘性解，其中 f 是 $\overline{\Omega}$ 上的连续函数且 $\inf_\Omega f(x)>0$ 或 $\sup_\Omega f(x)<0$，则如果

$$u\le v, x\in\partial\Omega, \tag{8}$$

那么

$$u\le v, x\in\Omega. \tag{9}$$

2.2. 正则性

我们给出边界Lipschitz正则性和函数Hölder连续性的定义。

定义2.3[21]设 $\Omega\subset R^n$ 是有界区域，当对任意的 $P\in\partial\Omega$ 时，存在坐标 $x'=(x_1,\dots x_{n-1})$，x_n 和原点 P 及 Ω 中定义的函数 $\phi: R^{n-1}\to R$，使得

$$\phi(0)=0,|\phi(x')-\phi(y')|\le K|x'-y'|, \tag{10}$$

$$\begin{aligned}&\Omega\cap\{|x'|\le L,|x_n|\le(K+1)L\}\\&=\{x_n>\phi(x')\}\cap\{|x'|\le L,|x_n|\le(K+1)L\},\end{aligned} \tag{11}$$

我们则称 Ω 边界为Lipschitz光滑，其中 K 是Lipschitz常数。

关于函数的Hölder连续，常用定义如下：

定义2.4设 u 是定义在区域 Ω 内的函数，令 $0<\alpha\le 1$，如果

$$[u]_{C^\alpha(\overline{\Omega})}=\sup_{\substack{x,y\in\Omega\\x\ne y}}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} \tag{12}$$

有界，则称函数 u 在区域 Ω 中具有指数为 α 的Hölder连续性，当 $\alpha=1$ 时，函数 u 是Lipschitz连续的。

2.3. 闸函数

在本节中，我们根据规范无穷Laplace方程上解 (或下解)的性质构造出有界的闸函数，后文将利用闸函数得到方程粘性解在区域边界的正则性。下面介绍闸函数的构造过程。

简单计算可以知道

$$h(x)=|x-x_0| \tag{13}$$

为规范无穷Laplace方程 $-\Delta_\infty^N u(x)=0$ 的一个基本解。首先构造闸函数

$$h_{r,R}(x)=\frac{h(x)-h(r)}{h(R)-h(r)}, \tag{14}$$

其中 $0<r<R<\infty$，则

$$\begin{cases}0<h_{r,R}(x)<1, x\in B_R\setminus B_r,\\h_{r,R}=0, \quad x\in\partial B_R,\\h_{r,R}=1, \quad x\in\partial B_r.\end{cases} \tag{15}$$

引理2.5[17] $u(x)=a|x-x_0|^2+b|x-x_0|+d$ 为方程 $\Delta_\infty^N u(x)=2a$ 的粘性解。

记 $\omega(x)=-\frac{F}{2}(|x-x_0|^2-1)$，则有以下结论；

引理2.6 $v(x)=\omega(x)+bh_{1,1/4}(x)+d$ 为非齐次规范无穷Laplace方程 $-\Delta_\infty^N u(x)=F$ 的粘性解。

3. Lipschitz区域边界的 C^β 估计

为了证明解在区域边界附近的Hölder估计，我们分为以下三步：

第一步：首先给出迭代所需的初步估计。不失一般性，假设 $0\in\partial\Omega, u(0)=0, g(0)=0, |u|\le 1, \sup_\Omega f<1$, 我们研究解在点 $0\in\partial\Omega$ 附近的正则性。

引理3.1假设 u 是非齐次规范无穷Laplace方程

$$\begin{cases}-\Delta_\infty^N u(x)=f(x), & x\in\Omega,\\u(x)=g(x), & x\in\partial\Omega\cap B_1.\end{cases} \tag{16}$$

的粘性解。在定理1.1的假设条件下，存在常数 $0<\tau<1$ 依赖于 K,n，有

$$\sup_{B_{\frac{1}{8}}\cap\Omega}u\le\tau(\sup_{B_1\cap\Omega}u-\sup_{B_1\cap\partial\Omega}u)+\sup_{B_1\cap\partial\Omega}u+C\sup_{B_1\cap\Omega}f, \tag{17}$$

成立。

证明：不失一般性，假设 $\partial\Omega$ 是沿 x 方向的Lipschitz边界，K 是Lipschitz常数，Ω 在 x_n^+ 方向上，定义 $x_0=(0,\cdots,0,-\frac{1}{2})\in R^n, E_0=\Omega\cap\left(B_1(x_0)\setminus B_{\frac{1}{4}}(x_0)\right)$。

构造闸函数如下：

$$v(x)=h_{1,\frac{1}{4}}(x)\left[\sup_{B_1\cap\Omega}u-\left(\sup_{E_0}u-\omega(r)\right)\right]+\sup_{E_0}u-\omega(r)+\omega(x), \tag{18}$$

其中 $\omega(x)$ 满足引理2.6且 $F=\sup_{B_1\cap\Omega}f$。

对任意 $x_0\in E_0$,计算可知

$$-\Delta_\infty^N v(x) = F \ge f, \tag{19}$$

并且在边界上有

$$\begin{cases} v(x) = \sup\limits_{B_1 \cap \Omega} u, & x \in \partial B_1(x_0), \\ v(x) = \sup\limits_{E_0} u, & x \in \partial B_{\frac{1}{4}}(x_0), \end{cases} \tag{20}$$

即

$$u \le v,\ x \in \partial E_0. \tag{21}$$

在区域 $B_{1/8} \cap \Omega$ 应用比较定理2.2，我们有

$$u(x) \le v(x), x \in B_{1/8} \cap \Omega. \tag{22}$$

也就是

$$\begin{aligned} u(x) &\le h_{1,\frac{1}{4}}(x)\left[\sup_{B_1 \cap \Omega} u - \left(\sup_{E_0} u - \omega(r)\right)\right] + \sup_{E_0} u - \omega(r) + \omega(x) \\ &\le h_{1,\frac{1}{4}}(x)\sup_{B_1 \cap \Omega} u + \left(1 - h_{1,\frac{1}{4}}(x)\right)\left(\sup_{E_0} u - \omega(r)\right) + C\sup_{B_1 \cap \Omega} f \\ &\le h_{1,\frac{1}{4}}(x)\sup_{B_1 \cap \Omega} u + \left(1 - h_{1,\frac{1}{4}}(x)\right)\sup_{B_1 \cap \partial\Omega} u + C\sup_{B_1 \cap \Omega} f \\ &\le h_{1,\frac{1}{4}}(x)\left(\sup_{E_0} u - \sup_{B_1 \cap \partial\Omega} u\right) + \sup_{B_1 \cap \partial\Omega} u + C\sup_{B_1 \cap \Omega} f \\ &\le \tau\left(\sup_{E_0} u - \sup_{B_1 \cap \partial\Omega} u\right) + \sup_{B_1 \cap \partial\Omega} u + C\sup_{B_1 \cap \Omega} f. \end{aligned} \tag{23}$$

引理3.2在定理1.1的假设条件下，存在常数 $0 < \tau < 1$ 依赖于 K, n，有

$$Osc_{B_{\frac{1}{8}} \cap \Omega} u \le \tau(\underset{B_1 \cap \Omega}{Osc}\, u - \underset{B_1 \cap \partial\Omega}{Osc}\, u) + \underset{B_1 \cap \partial\Omega}{Osc}\, u + C\|f\|_{L^\infty(B_1 \cap \Omega)}. \tag{24}$$

证明：首先，从引理3.1我们得到

$$\sup_{B_{\frac{1}{8}} \cap \Omega} u \le \tau(\sup_{B_1 \cap \Omega} u - \sup_{B_1 \cap \partial\Omega} u) + \sup_{B_1 \cap \partial\Omega} u + C\sup_{B_1 \cap \Omega} f, \tag{25}$$

对函数 $-u(x)$ 应用上面引理，通过计算可以得到

$$\inf_{B_{\frac{1}{8}} \cap \Omega} u \ge \tau(\inf_{B_1 \cap \Omega} u - \inf_{B_1 \cap \partial\Omega} u) + \inf_{B_1 \cap \partial\Omega} u - C\sup_{B_1 \cap \Omega} f, \tag{26}$$

最后，将上述两个不等式(17)与(26)相减可以得到

$$Osc_{B_{\frac{1}{8}} \cap \Omega} u \le \tau(\underset{B_1 \cap \Omega}{Osc}\, u - \underset{B_1 \cap \partial\Omega}{Osc}\, u) + \underset{B_1 \cap \partial\Omega}{Osc}\, u + C\|f\|_{L^\infty(B_1 \cap \Omega)}, \tag{27}$$

引理得证。

第二步：现在我们给出Hölder估计的主要迭代过程。记

$h = \frac{1}{8}, h^k = \left(\frac{1}{8}\right)^k, \eta_k = \|f\|_{L^\infty\left(B_{h^k}(0) \cap \Omega\right)}, \varepsilon_k = \|g\|_{L^\infty\left(B_{h^k}(0) \cap \partial\Omega\right)}$，具体如下述引理：

引理3.3在定理1.1的假设条件下，若 $[g]_{C^\alpha(0)} \le \epsilon_0$，则有

$$Osc_{B_{h^k}(0) \cap \Omega} u \le \tau\left(\gamma_{k-1} - 2\epsilon_{k-1}\right) + 2\epsilon_{k-1} + C\eta_{k-1}, \tag{28}$$

其中 $k \in N^+$，常数 C 依赖于 K, n, ϵ_0, η_0。

证明：利用数学归纳法。由 $0 \in \partial\Omega, u(0) = 0$ 和 $\|g\|_{L^\infty(B_h \cap \partial\Omega)} = \epsilon_0$，可以得到

$$\|g\|_{L^\infty\left(B_{h^k} \cap \partial\Omega\right)} \le \epsilon_0 h^{(k-1)\alpha}. \tag{29}$$

当 $m = 0$ 时，u 通过归一化可以得到 $|u| \le 1$，引理得证。

当 $m = 1$ 时，由引理3.2可以得到

$$\begin{aligned} &Osc_{B_h(0) \cap \Omega} u(x) \\ &\le \gamma_1 := \tau\left(Osc_{B_1(0) \cap \Omega} u(x) - 2\epsilon_0\right) + 2\epsilon_0 + C\eta_0. \end{aligned} \tag{30}$$

令 ϵ_0, η_0 充分小，使得

$$\gamma_1 = \tau\left(Osc_{B_1(0) \cap \Omega} u(x) - 2\epsilon_0\right) + 2\epsilon_0 + C\eta_0 < 1. \tag{31}$$

假设当 $m = k-1$ 时不等式成立，现在证明当 $m = k$ 时不等式也成立。

令 $\tilde{u}(x) = u\left(h^{k-1}x\right)$ 其中 $x \in \Omega \cap B_{h^{k-1}}$，计算可得

$$-\Delta_\infty^N \tilde{u}(rx) = r^2 f(rx). \tag{32}$$

由上式放缩可以得到：

$$-\Delta_\infty^N u\left(h^{k-1}x\right) = h^{2(k-1)} f\left(h^{k-1}x\right), \tag{33}$$

并且 $Osc_{B_h \cap \Omega} \tilde{u} = Osc_{B_{h^k} \cap \Omega} u$。根据引理3.2，任意 $x \in B_h$，函数 $\tilde{u}$ 有如下性质：

$$\begin{aligned} &Osc_{B_h \cap \Omega} \tilde{u}(x) \\ &\le \tau\left(Osc_{B_1 \cap \Omega} \tilde{u}(x) - Osc_{B_1 \cap \partial\Omega} g\left(h^{k-1}x\right)\right) + Osc_{B_1 \cap \partial\Omega} g\left(h^{k-1}x\right) \\ &\quad + C\left\|h^{2(k-1)} f\left(h^{k-1}x\right)\right\|_{L^\infty(B_1(0) \cap \Omega)} \\ &\le \tau\left(Osc_{B_{h_{k-1}}(0) \cap \Omega} u(x) - 2\|g\|_{L^\infty\left(B_{h^{k-1}}(0) \cap \Omega\right)}\right) + 2\|g\|_{L^\infty\left(B_{h^{k-1}}(0) \cap \Omega\right)} \\ &\le \tau(\gamma_{k-1} - 2\ {}_{k-1}) + 2\ {}_{k-1} + C\eta_{k-1}, \end{aligned} \tag{34}$$

由 $Osc_{B_h \cap \Omega} \tilde{u} = Osc_{B_{h^k} \cap \Omega} u$，可以得到

$$Osc_{B_{h^k}(0) \cap \Omega} u(x) \le \tau\left(\gamma_{k-1} - 2\epsilon_{k-1}\right) + 2\epsilon_{k-1} + C\eta_{k-1}, \tag{35}$$

综上所述，引理得证。

第三步：在以上几个引理的基础上，我们可以证明规范无穷Lpalace方程解的区域边界C^{β}估计，具体证明过程如下：

证明：不失一般性，假设

$$0\in\partial\Omega, u(0)=g(0)=0, \|f\|_{L^{\infty}(B_1(0)\cap\Omega)}\le\eta_0, [g]_{C^{\alpha}(0)}\le\epsilon_0,$$

否则构造函数

$$\tilde{u}(x)=\min\{\epsilon_0,\eta_0\}\frac{u(x)-u(0)}{\|u\|_{L^{\infty}(R^n)}+\|f\|_{L^{\infty}(\Omega)}}. \quad (36)$$

根据引理3.3，当k充分大时，对任意的$x\in B_{h^k}(0)\cap\Omega$，有

$$\begin{aligned}
&Osc_{B_{h^k}\cap\Omega}u\\
&\le\tau\left(Osc_{B_{h^{k-1}}\cap\Omega}u-2h^{(k-1)\alpha}\epsilon_0\right)+2h^{(k-1)\alpha}\epsilon_0+Ch^{2(k-1)}\eta_0\\
&\le\tau[\tau\left(Osc_{B_{h^{k-2}}\cap\Omega}u-2h^{(k-2)\alpha}\epsilon_0\right)+2h^{(k-2)\alpha}\epsilon_0\\
&\quad+Ch^{2(k-1)}\eta_0-2h^{(k-1)\alpha}\epsilon_0]+2h^{(k-1)\alpha}\epsilon_0+Ch^{2(k-1)}\eta_0\\
&\le\tau^k+2\sum_{i=1}^{k}\tau^{i-1}(1-\tau)h^{(k-i)\alpha}\epsilon_0+C\sum_{i=1}^{k}\tau^{i-1}h^{2(k-i)}\eta_0\\
&\le\tau^k+C\epsilon_0\tau^{-1}k\hat{\gamma}^k+C\eta_0\tau^{-1}k\left(\hat{\gamma}\right)^k\\
&\le C\left(k^{\frac{1}{k}}\hat{\gamma}\right)^k\le C\tilde{\gamma}^k.
\end{aligned} \quad (37)$$

其中$\hat{\gamma}=\max\{h^{\alpha},h^2,\gamma\}$.

于是有

$$Osc_{B_{h^k}\cap\Omega}u\le\tilde{\gamma}^k\le\left(h^k\right)^{\beta}, \quad (38)$$

其中$\beta=\ln\tilde{\gamma}/\ln h$.

对任意的$x\in B_{1/2}(0)$，存在常数m，使得对任意$x\in B_{h^m}(0)\setminus B_{h^{m+1}}(0)$，有

$$|u(x)|\le Osc_{B_{h^m}\cap\Omega}u\le C\left(h^m\right)^{\beta}\le Ch^{-\beta}\cdot\left(h^{m+1}\right)^{\beta}\le C|x|^{\beta} \quad (1)$$

成立，因此$u(x)$在0处是Hölder连续的。

为书写方便，我们仅证明了在边界上某一点$(x=0)$的连续性，事实上以上估计对对边界上任意一点都成立。到此定理证明完毕。

4．结论

本文研究了有界区域上非齐次规范无穷Laplace方程解在边界上的正则性。我们首先通过构造合适的闸函数列来逼近方程的解，然后利用迭代方法计算误差得到方程解在边界上的Hölder估计。本文证明了当区域边界是Lipschitz连续、右端非齐次项$f(x)\in C(x)\cap L^{\infty}(\Omega)$且$\inf_{\Omega}f(x)>0$、边界值$g(x)\in C^{\alpha}(\partial\Omega)$时，非齐次规范无穷Laplace方程$-\Delta_{\infty}^{N}u(x)=f(x)$的粘性解在Lipschitz边界上是Hölder连续的。

致谢

本文为南京航空航天大学青年科技创新基金(NS2019044)的阶段性成果之一。

参考文献

[1] G. Aronsson. On certain singular solutions of the partial differential equation [J], Manuscripta Math, 1984, 47 (1-3): 133-151.

[2] E. Rosset. A lower bound for the gradient of ∞-harmon-ic functions, Electronic Journal of Differential Equations, 1996, 1996 (2): 1-7.

[3] O. Savin. C^1 regularity for infinity harmonic functions in two dimensions [J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 2005, 176 (3): 351-361.

[4] L.C. Evans, and O. Savin. $C^{(1,A)}$ regularity for infinity harmonic functions in two dimensions[J]. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 2008, 3 2(3): 325-347.

[5] L. C. Evans, C. K. Smart. Everywhere differentiability of infinity harmonic functions [J]. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 2011, 42 (1-2): 289-299.

[6] G.H. Hong. Boundary differentiability of infinity harmonic functions [J]. Nonlinear Analysis, 2013, 93 (3): 15-20.

[7] C.Y. Wang, Y.F. Yu. C^1 boundary regularity of planar infinity harmonic functions [J]. Mathematical Research Letters, 2012, 19 (4): 823-835.

[8] X.M. Feng, G.H. Hong. Pointwise boundary differentiability for the infinity Laplace equations [J]. Nonlinear Analysis, 2020, 199: 1-22.

[9] E. Lindgren. On the regularity of solutions of the inhom-ogeneous infinity Laplace equation [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2014, 142 (1): 277-288.

[10] E．Rosset. Symmetry and convexity of level sets of solutions to infinity Laplace equation [J]. Electronic Journal of Differential Equations，1998, 1998 (34): 1-12.

[11] G.H. Hong. Boundary differentiability for inhomogeneous infinity laplace equations [J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2014, 2014 (72): 1-6.

[12] B. Mebrate, A. Mohammed. Harnack inequality and an asymptotic mean-value property for the Finsler infinity-Laplacian [J]. Advances in Calculus of Variations, 2019, 14: 0-0.

[13] X. M. Feng, G. H. Hong. Slope estimate and boundary differentiability for inhomogeneous infinity Laplace equation on convex domains [J]. Nonlinear Analysis, 2018, 176: 36-47.

[14] H. Koch, Y. R. Y. Zhang, Y. Zhou. Some sharp Sobolev regularity for inhomogeneous infinity Laplace equation in plane [J]. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 2019, 132: 483-521.

[15] Y. Peres, O. Schramm, and S. Sheffield, and D. B. Wilson. Tug-of-war and the infinity Laplacian [J]. Springer New York, 2011, 22 (1): 167-210.

[16] R. Jain, B. R. Nagarai. $C^{(1,1/3)}$ regularity in the Dirichlet problem for δ_∞, Computer and Mathematics with Applications [J]. 2007, 53 (3-4): 377-394.

[17] G. Z. Lu, and P. Y. Wang. A PDE perspective of the no-rmalized infinity Laplacian [J]. Communications in Partial Differential Equations, 2008, 33 (10): 1788-1817.

[18] F. Charro, G. D. Philippis, and A. D. Castro, and D. Máximo. On the Aleksandrov-Bakelman-Pucci estimate for the infinity Laplacian [J]. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 2011, 48 (3): 667-693.

[19] C. Graziano, and F. Ilaria. A C^1 regularity result for the inhomogeneous normalized infinity Laplacian [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2015, 144 (6): 2547-2558.

[20] 蒋飞达,刘芳,杨孝平.含无穷拉普拉斯算子的渗流问题的李普希兹估计[J].数学年刊A辑，2020,41(2)：201-212。

[21] L.H. Wang. On the regularity theory of fully nonlinear parabolic equations [J]. Communications on Pure and Applied Mathematics. 1992, 45 (3): 25–76.